Chapitre 1

Bases Mathématiques

Déf. 1 (Ensemble, élément)

Un *ensemble* est entièrement défini par les *éléments* qui le constituent.
Les éléments de l'ensemble peuvent être de nature quelconque.

Déf. 2 (Appartenance, inclusion)

Soit un ensemble $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e\}$. Alors on dit que a (b, c, ...) *appartient* à $\mathcal{E}$, ce qui est noté $a \in \mathcal{E}$.
Si un ensemble $\mathcal{E}$ contient tous les éléments d'un ensemble $\mathcal{F}$, on dit que $\mathcal{F}$ est *inclus* dans $\mathcal{E}$, ce qui est noté $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que aussi $\mathcal{F}$ est un *sous-ensemble* de $\mathcal{E}$.
Bien noter la différence entre l'appartenance (qui relie un élément à un ensemble qui le contient) et l'inclusion (qui relie deux ensembles).

Example 1.0.0.1
Avec l'ensemble $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ on a :
- $c \in \mathcal{A}$
- $\{c\} \subset \mathcal{A}$

Déf. 3 (Extension, compréhension, propriété caractéristique)

Un ensemble peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. On parle alors de *définition en extension*.
On peut aussi définir un ensemble en indiquant une *propriété* que vérifient tous les éléments de l'ensemble, et aucun autre. Une telle propriété est dite *propriété caractéristique*, et elle permet une *définition en compréhension* (ou en *intension*) de l'ensemble.

Example 1.0.0.2 Définition par Extension
$\mathcal{A} = \{a, b, c\}$

Example 1.0.0.3 Définition par Intension
Il existe plusieurs notations :
- $\mathcal{A} = \{x | x < 3\}$

– $\mathcal{A} = \{x : x < 3\}$

Déf. 4 (Opérations ensemblistes)

intersection $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$ **et** $x \in \mathcal{F}$

union $x \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$ **ou** $x \in \mathcal{F}$

différence (ensembliste) $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in \mathcal{A}$ et $x \notin \mathcal{B}$

complémentaire $x \in \complement_{\mathcal{E}}$ si et seulement si $x \notin \mathcal{E}$

Cette définition du complémentaire repose implicitement sur l'existence d'un sur-ensemble de $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{U}$. Alors on peut aussi définir le complémentaire au moyen de la différence ensembliste : $\complement_{\mathcal{E}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{E}$

Déf. 5 (Parties, ensemble vide)

Par définition, l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble : $\forall \mathcal{E} : \emptyset \subset \mathcal{E}$
Il est crucial de ne pas confondre appartenance et inclusion dans cette définition. Il serait faux d'écrire $\forall \mathcal{E} : \emptyset \in \mathcal{E}$
L'*ensemble des parties* d'un ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathcal{E}$ (y compris, donc, $\emptyset$ et $\mathcal{E}$ lui-même). On le note $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ou $2^{\mathcal{E}}$.

Example 1.0.0.4 Ensemble des Parties
Avec $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$

– $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\emptyset\}\}$

Déf. 6 (Produit cartésien)

Étant donnés deux ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, le *produit cartésien* de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, est un ensemble de couples : $\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{\langle x, y\rangle$ tels que $x \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{F}\}$
$\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ est aussi noté $\mathcal{E}^2$.

Déf. 7 (Relation)

Une *relation* R sur un ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}^2$.
On écrit $\langle x, y\rangle \in R$ ou xRy.

Example 1.0.0.5
La relation $R =$*est plus grand que* définit un sous-ensemble parmi un ensemble d'entités comparables. Si on considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{3, 4, 7\}$ alors on a :

– $\mathcal{A}^2 = \{\langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 7\rangle, \langle 7, 3\rangle, \langle 7, 4\rangle, \langle 7, 7\rangle\}$
– $R = \{\langle 4, 3\rangle, \langle 7, 3\rangle, \langle 7, 4\rangle\}$

Déf. 8 (Propriétés de relations)

Une relation R sur un ensemble $\mathcal{E}$ peut avoir les propriétés suivantes :

réflexivité $\forall x \in \mathcal{E} \ \langle x, x\rangle \in R$

symétrie $\forall x, y \in \mathcal{E} \ \langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

transitivité $\forall x, y, z \in \mathcal{E} \ (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

antisymétrie $\forall x, y \in \mathcal{E} \ (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \Rightarrow x = y$

Déf. 9 (Relation d'équivalence)

Une relation réflexive, symétrique et transitive est une *relation d'équivalence.*

Déf. 10 (Relation(s) d'ordre)

Une relation R réflexive, antisymétrique et transitive est une *relation d'ordre.*
- R est une relation *d'ordre strict* ssi elle vérifie la condition suivante :
  $\forall x, y \in \mathcal{E} \ \langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$
- R est une relation *totale* ssi elle vérifie la condition suivante :
  $\forall x, y \in \mathcal{E} \ \langle x, y\rangle \in R$ ou $\langle y, x\rangle \in R$
  (elle est *d'ordre partiel* sinon).

Déf. 11 (Application & fonction)

Une *application* f (ou *correspondance*, angl. *mapping*) entre deux ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, est un sous-ensemble de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ tel que $\forall x \in \mathcal{E}$, il existe au moins un $y \in \mathcal{F}$ tel que $\langle x, y\rangle \in f$.
Pour $a \in \mathcal{E}$ et $b, c \in \mathcal{F}$, on note la correspondance sous la forme $f(a) = \{b, c, \ldots\}$.
b et c sont des *images* de a par f.
Si pour tout élément de $\mathcal{E}$, il y a une image unique par f, f est une *fonction*, et la notation est simplifiée : $f(a) = b$.
Une fonction est *bijective* ssi chaque élément de $\mathcal{F}$ est l'image par f d'exactement un élément de $\mathcal{E}$.

Déf. 12 (Opération)

On dira qu'un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une *opération* $\circ$ s'il existe une fonction de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans un ensemble $\mathcal{H}$.
Pour $a, b \in \mathcal{E}$ et $c \in \mathcal{H}$, on note l'opération $a \circ b = c$.
Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, l'opération est dite *interne* (on parle aussi de *loi de composition interne*).

Déf. 13 (Propriétés des opérations)

Une opération $\circ$ sur un ensemble $\mathcal{E}^2 \to \mathcal{H}$ peut avoir les propriétés suivantes :
$(\forall\, a, b, c \in \mathcal{E})$

Interne $a \circ b \in \mathcal{E}$
Commutativité $a \circ b = b \circ a$
Associativité $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
Admet un élément neutre ε $a \circ \varepsilon = a$
Admet un élément absorbant 0 $a \circ 0 = 0$

Example 1.0.0.6
Les opérations usuelles ont les propriétés suivantes :

L'Addition : est une opération commutative, associative et interne sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, elle admet un élément neutre : 0 et pas d'élément absorbant.

La Division : est une opération qui n'est pas commutative, pas associative, pas interne sur $\mathbb{N}$: le quotient de deux entiers appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels). Elle admet un élément neutre : 1 et pas d'élément absorbant.

Déf. 14 (Segment de type (m, n))

Un *segment de type* (m, n) (noté $[m, n]$) est le sous-ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à m et inférieurs ou égaux à n :
$[m, n] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$

Déf. 15 (Ensemble fini, cardinal)

Un ensemble $\mathcal{E}$ est dit *fini* s'il existe une bijection de $\mathcal{E}$ sur un segment de type (1, n). n est appelé le *cardinal* de $\mathcal{E}$, noté $|\mathcal{E}|$ ou $\mathrm{card}(\mathcal{E})$.

Déf. 16 (Ensemble infini)

Un ensemble $\mathcal{E}$ est *infini dénombrable* ou *dénombrable* s'il existe une bijection de $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des entiers naturels.

Déf. 17 (Cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$)

Si $|\mathcal{E}| = n$ on démontre que $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ a 2^n éléments.

Remarque : Si $\mathcal{E}$ est infini dénombrable, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ n'est pas dénombrable. Il a la puissance du continu ($\aleph_0$).

Déf. 18 (Demi-groupe & monoïde)

Un *demi-groupe* est un couple ordonné $(\mathcal{E}, \circ)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, et $\circ$ une opération binaire associative de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
Un demi-groupe qui possède un élément neutre est appelé un *monoïde*.