Logique des prédicats (suite)

N° 26. Proposer plusieurs phrases en français qui ont les mêmes conditions de vérité que la formule suivante, où $F(x) = x$ est fermier, $P(x,y) = x$ possède y, et $B(x,y) = x$ bat y.

$$\forall x \forall y((F(x) \wedge P(x,y)) \rightarrow B(x,y))$$

Même question pour les formules suivantes ($P(x,y) = x$ parle à y, $j =$ Jean, $m =$ Marie, $C(x,y) = x$ croit y, $H(x) = x$ est une personne, $A(x) = x$ est un âne) :

(1) a. $(\neg P(j,m) \rightarrow \forall x(x \neq y \rightarrow \neg P(j,x)))$
b. $\neg \forall x((H(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow C(y,x))) \rightarrow C(m,x))$
c. $\forall x(F(x) \rightarrow \neg \exists y(A(y) \wedge P(x,y)))$

N° 27.
Traduisez en logique des prédicats les propositions suivantes, et, en cas d'ambiguïté, donnez toutes les traductions correspondantes.

(2) a. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer.
b. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.
c. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
d. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents.
e. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.
f. Tout le monde a lu un livre de logique.

N° 28. Soit $M = \langle U, I \rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
$I(a) =$ Alain ; $I(b) =$ Béatrice ; $I(c) =$ Christine ; $I(d) =$ David
$I(H) = \{$Alain, David$\}$; $I(F) = \{$Christine, Béatrice$\}$
$I(A) = \{\langle \text{Alain}, \text{Christine} \rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{Alain}, \text{David} \rangle\}$
$I(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{David} \rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{Christine}, \text{Alain} \rangle\}$

a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :

a. $D(d,b)$
b. $H(d) \wedge D(c,d)$
c. $D(d,b) \rightarrow F(a)$
d. $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a,c))$

b. Construisez le modèle $M' = \langle D, I' \rangle$, tel que (i) M' a le même domaine d'individus que M, (ii) I' associe la même dénotation que I aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans M' :

a. $H(c) \wedge H(a)$
b. $\forall x\,(H(x) \rightarrow A(x,c))$
c. $A(a,c) \rightarrow D(c,a)$
d. $\exists x \exists y\,((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x,y)) \vee$
$(H(x) \wedge F(y) \wedge A(y,x)))$

N° 29. Les phrases suivantes sont ambigües. Expliquer l'ambiguïté, et proposer, *quand c'est possible*, les deux représentations en logique des prédicats que l'on peut associer à ces phrases.

(3) a. Jean loue un appartement.
b. Tout étudiant lit un article.
c. Marie aime les chiens et les chats sauvages.
d. Tout le monde n'a pas aimé le film.
e. Paul devrait être à New York.

N° 30. Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

(4) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.
b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.
c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.

Solution 26.

$$\forall x \forall y (F(x) \land P(x,y)) \to B(x,y)$$

(Tout / n'importe quel / un) fermier possédant quelque chose (le bat / bat cette chose)
Si un fermier possède quelque chose, il la bat
Tout ce qui est possédé par un fermier est battu par lui
Un fermier bat tout ce qu'il possède
Tous les fermiers battent (tout ce qui leur appartient / toutes leurs possessions)
etc.

(5) a. Quand Jean ne parle pas à Marie, il ne parle pas non plus aux autres
b. Marie ne croit pas ceux que tout le monde croit.
c. Aucun fermier ne possède d'âne

Solution 27.

(6) a. *Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer.*
$(\forall x(P(x) \to \neg B(x)) \land \neg C(j))$
b. *Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.*
$(\forall x(P(x) \to \neg B(x)) \to \exists y(Q(y) \land R(j,y)))$
c. *Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.*
• à la même personne $\exists y \forall x((P(x) \land P(y)) \to M(x,y))$
• pour chaque personne, il y a quelqu'un à qui... $\forall x \exists y((P(x) \land P(y)) \to M(x,y))$
d. *Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents.* $\forall x((E(x) \land x \neq j) \to P(x))$
• Autre possibilité, toujours fausse [1] $(\forall x(E(x) \to P(x)) \land \neg P(j))$
e. *Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.*
• Tout enfant fait des bêtises [2] $\forall x(E(x) \to B(x))$ $\forall x(E(x) \to \exists y(B(y) \land F(x,y)))$
• Aucun enfant ne fait de bêtise $\forall x(E(x) \to \neg B(x))$ $\forall x(E(x) \to \neg \exists y(B(y) \land F(x,y)))$
f. *Tout le monde a lu un livre de logique.*
• Un livre a été lu par tout le monde $\exists x \forall y((LdL(x) \land P(y)) \to L(y,x))$
• Tout le monde a lu un livre différent $\forall y \exists x((LdL(x) \land P(y)) \to L(y,x))$

Solution 29.

(7) a. Jean loue un appartement.
b. Tout étudiant lit un article.
c. Marie aime les chiens et les chats sauvages.
d. Tout le monde n'a pas aimé le film.
e. Paul devrait être à New York.

((7)a) : ambiguïté lexicale : *louer* peut avoir comme sujet le locataire ou le propriétaire. On peut représenter l'ambiguïté en postulant un prédicat ternaire L, tel que $L(x,y,z) =$ x est locataire de y pour l'appartement z ; et en admettant que ((7)a) s'interprète « Jean loue un appartement à quelqu'un ». Alors les deux représentations sont : (A) $\exists p \exists a L(j,p,a)$; (B) $\exists p \exists a L(p,j,a)$
((7)b) : Ambiguïté de portée : ce peut être le même article pour tous les étudiants (A) ou un article différent (B). (A) $\exists y \forall x E(x) \land A(y) \to L(x,y)$; (B) $\forall x \exists y E(x) \land A(y) \to L(x,y)$

1. à moins de violer la présupposition que Jean est étudiant.
2. Première formule : on pose pour simplifier que $B(x) = x$ fait des bêtises. Pour être rigoureux, il faut bien sûr décomposer aussi ce prédicat, c'est fait dans la seconde formule.

((7)c) : Ambiguïté sur la portée de l'adjectif *sauvage*. [$D(x) = x$ est un chien.] (A) $\forall x \forall y (D(x) \wedge C(y) \wedge S(y)) \to (A(m,x) \wedge A(m,y))$; (B) $\forall x \forall y (D(x) \wedge S(x) \wedge C(y) \wedge S(y)) \to (A(m,x) \wedge A(m,y))$
((7)d) : Ambiguïté de la négation par rapport à la quantification universelle : soit tout le monde a detesté (A), soit il est faux que tout le monde a aimé (B). (A) $\forall x \neg A(x,f)$; (B) $\neg \forall x A(x,f)$.
((7)e) : Ambiguïté entre l'interprétation déontique (obligation morale) de *devrait* et l'interprétation épistémique (probabilité). Très difficile à représenter en logique des prédicats.

Solution 30.

• Phrase (a) :

Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

$$\text{Quand quelqu'un } \overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui } \underbrace{\text{a trompé tout le monde}}_{\Psi}}^{\Phi}\text{, il a tort}$$

— Premier niveau : *Quand quelqu'un* Φ*, il a tort*

— l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x\ ((Px \wedge \Phi x) \to Tx)$$

— Deuxième niveau : $\Phi x = x$ *fait confiance à quelqu'un qui* Ψ

— ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y\ ((Py \wedge \Psi y) \wedge C(x,y))$$
$$\forall y\ ((Py \wedge \Psi y) \to C(x,y))$$

— Troisième niveau : $\Psi y = y$ a trompé tout le monde

$$\forall z\ (Pz \to Tr(y,z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x\ \Big(\Big(Px \wedge \exists y\ \Big((Py \wedge \forall z\ (Pz \to Tr(y,z))) \wedge C(x,y)\Big)\Big) \to Tx\Big)$$

• Phrase (b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)

$$\neg \exists x\ (GCx \wedge \neg \exists y\ (Py \wedge CT(x,y)))$$
$$\neg \exists x\ (GCx \wedge \forall y\ (Py \to \neg CT(x,y)))$$

• Phrase (c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)

$$\forall x\ (Px \to (Ox \vee Fx))$$

Solution 28.

a.

a.	$D(d,b)$	vrai car $\langle I(a)(=\text{David}), I(b)(=\text{Béatrice})\rangle \in I(D)$
b.	$H(d) \wedge D(c,d)$	vrai car les deux membres de la conjonction sont vrais
c.	$D(d,b) \to F(a)$	faux car le conséquent est faux et l'antécédent vrai
d.	$(H(c) \wedge H(a)) \to D(a,c)$	vrai car l'antécédent et le conséquent sont faux

b. Un grand nombre de modèles peuvent rendre vraies les formules a à d, même si l'on se limite aux modèles minimaux. En voici un exemple :

$D' = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
$I'(a) = \text{Alain}$; $I'(b) = \text{Béatrice}$; $I'(c) = \text{Christine}$; $I'(d) = \text{David}$
$I'(H) = \{\text{Alain, Christine}\}$;
$I'(A) = \{\langle \text{Christine}, \text{Christine}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle\}$
$I'(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$
$I'(F) = \{\text{Béatrice}\}$