Logique des prédicats : modèles, équivalences, etc.

1. Pour chacune de ces formules du calcul des prédicats, indiquez (a) s'il s'agit d'une négation, une conjonction, une disjonction, une implication, une formule universelle ou une formule existentielle ; (b) la portée des quantificateurs ; (c) les variables libres ; (c) s'il s'agit d'une phrase.
   (i) $(\exists x A(x,y) \wedge B(x))$
   (ii) $\exists x(A(x,y) \wedge B(x))$
   (iii) $\exists x \exists y(A(x,y) \to B(x))$
   (iv) $\neg\exists x \exists y(A(x,y) \to B(x))$
   (v) $\forall x \forall y((A(x,y) \wedge B(y)) \to \exists w C(x,w))$

2. Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats. Donnez les deux formules les plus « naturelles », quand c'est possible.

   (7) a. Jean se fâche dès que Marie est en retard
   b. Jean lui en veut dès que Marie est en retard
   c. Dès que tout le monde fait du bruit, Jean se fâche
   d. Jean se fâche dès que quelqu'un fait du bruit
   e. Tout le monde se fâche dès que Marie est en retard
   f. Tout le monde se fâche si tout le monde est en retard
   g. Tout le monde se fâche si quelqu'un est en retard
   h. Tout le monde lui en veut si Marie fait du bruit
   i. Tout le monde lui en veut si quelqu'un est en retard
   j. Si un fermier possède un âne, il le bat
   k. Tout le monde est marqué par un amour déçu
   l. Marie ne croit pas quelqu'un à qui tout le monde fait confiance

3. Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes. Conclusion ?

   (8) a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper
   b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper
   c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes

4. **Modèles** Soit $M = \langle U, I\rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
   $I(a) = $ Alain ; $I(b) = $ Béatrice ; $I(c) = $ Christine ; $I(d) = $ David
   $I(H) = \{$Alain, David$\}$; $I(F) = \{$Christine, Béatrice$\}$
   $I(A) = \{\langle \text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{David}\rangle\}$
   $I(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{David}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$

   a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :
   a. $D(d,b)$
   b. $H(d) \wedge D(c,d)$
   c. $D(d,b) \to F(a)$
   d. $H(c) \wedge (H(a) \to D(a,c))$

   b. Construisez le modèle $M' = \langle D, I'\rangle$, tel que (i) M' a le même domaine d'individus que M, (ii) I' associe la même dénotation que I aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans M' :
   a. $H(c) \wedge H(a)$
   b. $\forall x\,(H(x) \to A(x,c))$
   c. $A(a,c) \to D(c,a)$
   d. $\exists x \exists y\,((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x,y)) \vee$
   $(H(x) \wedge F(y) \wedge A(y,x)))$

5. Proposer plusieurs phrases en français qui ont les mêmes conditions de vérité que la formule suivante, où $F(x) = x$ est fermier, $P(x,y) = x$ possède y, et $B(x,y) = x$ bat y.
   $$\forall x \forall y((F(x) \wedge P(x,y)) \to B(x,y))$$
   Même question pour les formules suivantes ($P(x,y) = x$ parle à y, $j = $ Jean, $m = $ Marie, $C(x,y) = x$ croit y, $H(x) = x$ est une personne, $A(x) = x$ est un âne) :

   (9) a. $(\neg P(j,m) \to \forall x(x \neq y \to \neg P(j,x)))$
   b. $\neg\forall x((H(x) \wedge \forall y(H(y) \to C(y,x))) \to C(m,x))$
   c. $\forall x(F(x) \to \neg\exists y(A(y) \wedge P(x,y)))$