Exercice 1 [5 points]

Le raisonnement suivant est-il valide ? Justifiez votre réponse au moyen d'une table de vérité.

(1) *Si Jean n'a pas de fièvre, il n'a pas la grippe, mais s'il a des vertiges, alors il a de la fièvre. Or il n'a pas de vertiges, donc il n'a pas la grippe.*

Avec les variable propositionnelles (a), on peut reformuler le texte comme en (b), ce qui correspond au syllogisme (c) (noter que *donc* correspond à la barre du syllogisme (qui représente la relation de conséquence logique) et pas à une implication matérielle).

(a)	(b)	(c)
F Jean a de la fièvre G Jean a la grippe V Jean a des vertiges	Si $\neg F$, $\neg G$, mais si V, alors F. Or $\neg V$ donc $\neg G$.	$\neg F \rightarrow \neg G$ $V \rightarrow F$ $\neg V$ ——— $\neg G$

Ce syllogisme est valide si chaque fois que les prémisses sont vraies, la conclusion l'est aussi (et par conséquent non valide si au moins dans un cas où les prémisses sont vraies, la conclusion ne l'est pas). Ou encore si la formule $(\alpha \rightarrow \beta)$ (où α représente la conjonction des prémisses et β la conclusion) est une tautologie.

				α_3	α_1	α_2	$\alpha =$ $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)$	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
F	G	V	$\neg F$	$\neg G$	$\neg F \rightarrow \neg G$	$V \rightarrow F$	$((\neg F \rightarrow \neg G) \wedge ((V \rightarrow F) \wedge \neg V))$	$\neg G$	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1

On voit facilement dans la table qu'il y a un cas où les prémisses sont toutes vraies et pourtant la conclusion ne l'est pas (marqué en rouge) : on en déduit que le raisonnement **n'est pas valide**. On vérifie de même (mais ce n'était pas nécessaire) que la formule $(\alpha \rightarrow \beta)$ n'est pas une tautologie.

Exercice 2 [10 points]

Donner une représentation en logique des prédicats des phrases suivantes. Bien préciser le vocabulaire utilisé et quand une phrase est ambiguë, proposer une représentation pour chaque interprétation possible.

(2) a. *Paul n'a pas présenté Léa à Jean.*

$\neg P(p, l, j)$

b. *Il faut que personne ne connaisse un secret pour que Jean s'y intéresse.*

On est en présence d'une condition nécessaire :

$\left(\boxed{\text{Jean s'intéresse à [un secret]}_i} \rightarrow \boxed{\text{Personne ne s'y}_i \text{ intéresse}} \right)$

Si on traduit *un secret* par un existentiel, on construit une *donkey sentence* :

$\left(\boxed{\exists x\ (Sx \wedge Ijx)} \rightarrow \boxed{\neg\exists y\ (Hy \wedge Iyx)} \right)$

Il faut donc passer par une traduction universelle :

$\forall x\ \Big((Sx \wedge I(j, x)) \rightarrow \neg\exists y\ (Hy \wedge Iyx) \Big)$

c. *Quand Jean est absent, tous ses camarades le regrettent.*
Il est relativement facile de représenter la paraphrase « *Si Jean est absent, les camarades de Jean regrettent Jean* » :
$(Aj \rightarrow \forall x\ (Cxj \rightarrow Rxj))$
L'interprétation « *Si Jean est absent, les camarades de Jean regrettent que Jean soit abent* » n'est pas représentable en logique des prédicats (le 2e argument de *regrettent* est une proposition et pas un individu).

d. *Les professeurs apprécient un étudiant qui connaît tous les pays.*
Au moins trois interprétations possibles :

Il y a un étudiant qui connaît tous les pays et que (tous) les profs apprécient	$\exists x\ ((Ex \wedge \forall y(Py \rightarrow Cxy)) \wedge \forall z(Pr(z) \rightarrow Azx))$
Tout étudiant qui connaît tout les pays est apprécié de tous les profs.	$\forall x\ ((Ex \wedge \forall y(Py \rightarrow Cxy)) \rightarrow \forall z(Pr(z) \rightarrow Azx))$
Pour chaque professeur, il y a un étudiant, qui connaît tous les pays, que ce prof apprécie.	$\forall z\ (Pr(z) \rightarrow \exists x((Ex \wedge \forall y(Py \rightarrow Cxy)) \wedge Azx))$

e. *Aucun client n'est remboursé s'il n'a pas essayé tous les articles.*
Lecture privilégiée (d'autres lectures sont possibles) : *pour tout client, s'il est faux qu'il a essayé tous les articles, il n'est pas remboursé* :
$\forall x\ (Cx \rightarrow (\neg\forall y(Ay \rightarrow Exy) \rightarrow \neg Rx))$

Exercice 3 [5 points]

Montrez que les formules de chacune des paires ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes, en donnant l'exemple d'une situation où l'une est vraie et pas l'autre.

(3) *a.* $\forall x(Ax \wedge Bx)$ *vs.* $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
b. $\exists x(Ax \wedge Bx)$ *vs.* $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$

- Soit un modèle (un univers) où toutes les entités qui sont A sont aussi B, et où il existe des entités qui ne sont pas A. Alors $\forall x(Ax \wedge Bx)$ est fausse (il faudrait que tout dans l'univers soit A) alors que $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ (tous les A sont B) est vraie.
- Soit un modèle où il n'existe pas d'entité qui soit A, mais où il existe au moins une entité qui ne soit pas A. Alors $\exists x(Ax \wedge Bx)$ est fausse (puisqu'elle dit qu'il existe une entité qui est A), et $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ est vraie.
  Montrons que cette dernière formule est vraie : soit e l'entité qui n'est pas A. Alors Ae est fausse, et par conséquent $(Ae \rightarrow Be)$ est vraie (voir la table de vérité de l'implication matérielle). Il existe donc une valeur de x (en l'occurrence e) telle que $(Ax \rightarrow Bx)$ est vraie, ce qui revient à dire que la formule $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ est vraie dans ce modèle.