

## TD 5 - Logique des prédicats

### 1. Syllogisme

(a) Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats

- (1) a. Tout ce que Jean n'a pas perdu, il l'a.  
 b. Jean n'a pas perdu un million de francs.  
 c. Jean a un million de francs.

(b) Analyser le syllogisme qui consiste à déduire de la conjonction de (1-a) et de (1-b) la conclusion (1-c). Expliquer où se situe l'erreur de raisonnement.

2. **Modèles** Soit  $M = \langle U, I \rangle$  le modèle suivant :  $U = \{\text{Alain, Béatrice, Christine, David}\}$ .

$I(a) = \text{Alain}$  ;  $I(b) = \text{Béatrice}$  ;  $I(c) = \text{Christine}$  ;  $I(d) = \text{David}$

$I(H) = \{\text{Alain, David}\}$  ;  $I(F) = \{\text{Christine, Béatrice}\}$

$I(A) = \{\langle \text{Alain, Christine} \rangle, \langle \text{David, Béatrice} \rangle, \langle \text{Alain, David} \rangle\}$

$I(D) = \{\langle \text{Christine, David} \rangle, \langle \text{Alain, Béatrice} \rangle, \langle \text{David, Béatrice} \rangle, \langle \text{Christine, Alain} \rangle\}$

a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :

- a.  $D(d, b)$   
 b.  $H(d) \wedge D(c, d)$   
 c.  $D(d, b) \rightarrow F(a)$   
 d.  $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a, c))$

b. Construisez le modèle  $M' = \langle D, I' \rangle$ , tel que (i)  $M'$  a le même domaine d'individus que  $M$ , (ii)  $I'$  associe la même dénotation que  $I$  aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans  $M'$  :

- a.  $H(c) \wedge H(a)$   
 b.  $\forall x (H(x) \rightarrow A(x, c))$   
 c.  $A(a, c) \rightarrow D(c, a)$   
 d.  $\exists x \exists y ((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x, y)) \vee (H(x) \wedge F(y) \wedge A(y, x)))$

3. **Modèles** La figure 1 représente un modèle.

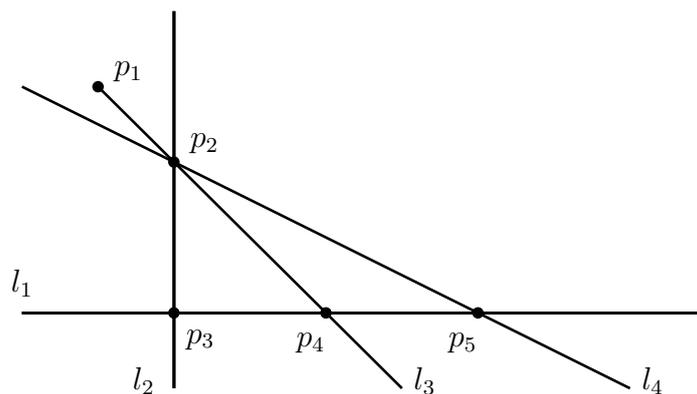


FIGURE 1 – Un modèle

Le modèle est constitué des éléments suivants :

- son domaine est l'ensemble des points  $p_i$  et des lignes  $l_i$  de la figure
- on considère les prédicats suivants :
  - $P$  un prédicat unaire,  $P(x) : "x \text{ est un point}"$
  - $L$  un prédicat unaire,  $L(x) : "x \text{ est une ligne}"$
  - $S$  un prédicat binaire,  $S(x, y) : "x \text{ est sur } y"$
  - $E$  un prédicat ternaire,  $E(x, y, z) : "y \text{ est entre } x \text{ et } z"$

- (a) Donnez l'extension de chacun des prédicats.
- (b) Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes dans le modèle ci-dessus :

- (2)
- a.  $\forall x(Lx \leftrightarrow \exists ySxy)$
  - b.  $\forall x\forall y((Lx \wedge Ly) \rightarrow \exists z(Pz \wedge Sxz \wedge Szy))$
  - c.  $\forall x\forall y((Px \wedge Py) \rightarrow \exists z(Lz \wedge Sxz \wedge Syz))$
  - d.  $\exists x\exists y\forall z(Pz \rightarrow (Sxz \vee Szy))$
  - e.  $\forall x\forall y\forall z(Exyz \leftrightarrow Ezyx)$
  - f.  $\forall x(Lx \rightarrow \exists y\exists z\exists w(Syx \wedge Sxz \wedge Swx \wedge Eyzw))$
  - g.  $\forall x(\exists y_1\exists y_2(y_1 \neq y_2 \wedge Sxy_1 \wedge Sxy_2) \rightarrow \exists z_1\exists z_2Ez_1xz_2)$

4. **Présupposition et égalité** Russel proposait de représenter au même niveau le contenu présupposé et le contenu asserté d'une proposition. Par exemple, pour *C'est Marcel qui est coupable* on aurait la formule  $\exists x C(x) \wedge C(m)$  (il existe un coupable et Marcel est coupable). De même, pour *Le Roi de France est chauve*, on aurait la formule suivante<sup>1</sup>  $\exists x RdF(x) \wedge \forall y (RdF(y) \rightarrow y = x) \wedge C(x)$ .

Proposer une représentation dans le même esprit pour chacun des énoncés suivants.

- (3)
- a. Jean aussi est venu.
  - b. Léa a réussi son ascension.
  - c. Seul le facteur est passé.
  - d. Paul s'est fait voler sa voiture.

5. Traduire en logique des prédicats les phrases suivantes :

- (4)
- a. Tout les malades consultent un médecin.
  - b. Si quelqu'un qui ne peut plus jouer a perdu, alors j'ai perdu.
  - c. Tout le monde viendra, à moins que la fête soit annulée.
  - d. Tous les étudiants qui vivent à Paris ou dans la région n'ont pas de voiture.
  - e. Max ne veut pas parler à exactement deux personnes.
  - f. Tout le monde est réveillé s'il y a un bruit.
  - g. Si tous les logiciens sont intelligents, alors même Alfred est intelligent.
  - h. Personne ne doit dépendre de tout le monde.
  - i. Il faut qu'un journaliste l'interroge pour qu'un politicien se confie.

---

1. La logique avec égalité est nécessaire pour exprimer formellement l'unicité.