A.2 Automates et algorithmes (II)

1. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$.
   (a) Proposer un automate déterministe (pas nécessairement complet) qui reconnaît le langage sur Σ^* de tous les mots qui commencent par c et se terminent par c.
   (b) Proposer un automate déterministe qui reconnaît tous les mots de Σ^* qui comprennent le motif abb^*a.
   (c) Proposer un automate (pas nécessairement complet) qui reconnaît tous les mots de Σ^* qui comprennent le motif abb^*a **et** commencent et se terminent par c.
2. Soit l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. Proposer un automate fini déterministe qui reconnaît le langage $L_2 = \{u \in X^* / \nexists v, w \in X^* \text{ t.q. } u = vbacaw\}$.
3. Proposer un automate minimal (en nombre d'états) qui reconnaisse le langage décrit par l'expression rationnelle $a^*(c(ab|ba^*)|cab|cb)$. On déduira de l'automate une expression rationnelle plus simple. On ne demande pas nécessairement d'appliquer les algorithmes vus en cours.
4. Proposer un automate qui reconnaît $L_1 \cap L_2$, où L_i est le langage reconnu par $\mathcal{A}_i$.

$\mathcal{A}_1$	a	b	c
$\rightarrow$ 1	2		4
2		3	
3	2		4
$\leftarrow$ 4	2	4	

$\mathcal{A}_2$	a	b	c
$\rightarrow$ A	A	B	D
B		C	B
C	A		D
$\leftarrow$ D	C		

5. Minimiser l'automate dont la table de transition est la suivante ($X = \{a, b\}$; les états sont désignés par des lettres majuscules) :

δ	A	B	C	D	E	F	G	H
a	B	G	A	C	H	C	G	G
b	F	C	C	G	F	G	E	C

6. Appliquer l'algorithme de suppression des ε-transitions à l'automate obtenu par la méthode systématique pour le langage $(a|c)(b|\varepsilon)d^*$
7. Construire l'automate généralisé correspondant à la table

	0	1
$\rightarrow$ A	B	A
$\leftarrow$ B	B	A

   Donner l'expression rationnelle correspondante.
8. Proposer un automate **minimal** qui reconnaisse le même langage que l'expression rationnelle $a(b|bc)^*c$. (Il peut être intéressant de passer par une étape de déterminisation.)
9. Soit l'alphabet $X = \{a, b, c, d, e\}$. Proposer une grammaire régulière qui engendre tous les mots de X^* qui se terminent par ade. On pourra se faciliter la tâche en passant par des étapes intermédiaires (automates...).
10. Soit la grammaire régulière suivante :

$$G = \left\langle \{a, b, c, d\}, \{S, T, V\}, S, \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aS|bS|cT, \\ T & \rightarrow & aV|bV|aT|bT|cT|dT, \\ V & \rightarrow & \varepsilon \end{array} \right\} \right\rangle.$$

   a. Dessiner un automate (non déterministe) reconnaissant $L_G(S)$.
   b. Déterminiser cet automate.
   c. En déduire une nouvelle grammaire reconnaissant $L_G(S)$.

11. Soit la grammaire donnée par les règles suivantes :

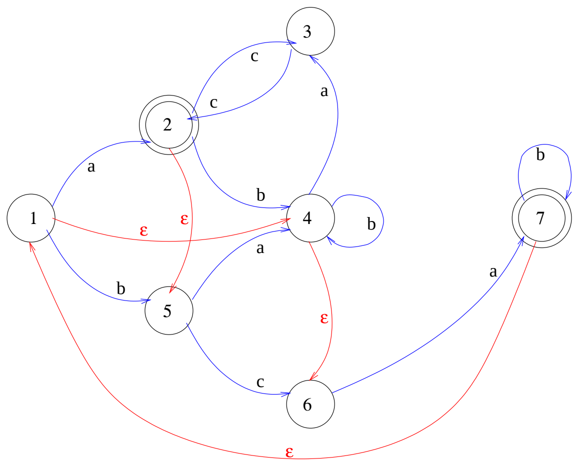
$$\begin{array}{lcl} S & \to & aA \mid bB \\ B & \to & aA \mid bC \mid b \\ A & \to & bB \mid aC \mid a \\ C & \to & aC \mid a \mid b \mid bC \end{array}$$

   (a) Construire l'automate à états fini associé à cette grammaire.
   (b) Donner les états successifs permettant de reconnaître les trois chaînes aaa, $babba$ et $babaaaa$.
   (c) Cet automate est-il déterministe ? Si non, écrire l'automate à états fini déterministe correspondant.

12. Soit l'automate généralisé représenté dans le tableau suivant. Donnez l'expression rationnelle que l'on obtient en supprimant en premier l'état 1, puis l'état 2 ; et donnez celle que l'on obtient en supprimant en premier l'état 2. Qu'en déduisez-vous ?

$\nearrow$	1	2	F
I	$a\|b$	ε	$\emptyset$
1	a	$\emptyset$	ε
2	c^*	b	$\emptyset$

13. Soit l'automate suivant. Proposer un automate sans ε-transitions (mais pas nécessairement déterministe) qui reconnaît le même langage.



14. Montrez que le langage des "carrés parfaits" n'est pas un langage rationnel.
$L_{cp} = \{u \in \Sigma^* \ / \ \exists v \in \Sigma^* \text{ t.q. } u = v^2\}$

15. Montrez que le langage des mots dont la longueur est un nombre premier n'est pas un langage rationnel. Même question avec les mots dont la longueur est un carré parfait.