Bases mathématiques

1. Soit l'ensemble de personnes $\mathcal{E} = \{Jean, Marie, Paul, Kim, Sandy, Bob\}$.
   - Quelle est la cardinalité de $\mathcal{E}$?
   - Donner le contenu de $\mathcal{E}^2$
   - On sait que Jean aime Marie, Sandy, Kim et Paul, que Marie aime Paul, Sandy, Kim et Jean, que Bob aime Sandy et Kim, que Sandy aime Kim, que Kim et Paul n'aiment personne à part eux-mêmes, et que tout le monde s'aime soi-même. Exprimer cela de manière formelle par une relation $A = x$ aime y.
   - Quelles sont les propriétés de la relation A ?
2. Soit l'ensemble $\mathcal{E} = [1, 5]$. Donner une caractérisation ensembliste de l'opération de soustraction de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Donner les propriétés de l'opération ainsi décrite.
3. L'équation $y^2 = 1 - x^2$ décrit-elle une fonction ? Même question pour l'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$.
4. Donnez les propriétés formelles de la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

Théorie des langages formels

1. Soit $x = abbcc$ un mot sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$.
   (a) Quelle est la valeur de $|x|$? et de $|x|_a$?
   (b) Donner un mot de X^3 qui ne soit pas un facteur de x.
   (c) Donner un sous-mot de x qui n'est pas un facteur de x.
   (d) Donner tous les facteurs de x qui appartiennent à X^3.
   (e) Donner les ensembles $Pre(x)$ et $Suf(x)$ des préfixes et suffixes de x.
2. Soit $v = abacbc$. Donner la liste des préfixes de v, la liste de ses suffixes, la liste de ses facteurs.
3. Soit le mot $u = aabcab$. Comment faire la liste des sous-mots de u ?
4. Donner l'algorithme qui, étant donné un mot (tableau de caractères), fournit (a) la liste de ses préfixes, et (b) la liste de ses facteurs.
5. Soit $X = \{a, b\}$. Calculer le produit $A.B$ pour les langages A et B suivants :
   $A = \{a, ab, bb\}$ $B = \{\varepsilon, b, aa\}$
   $A = \emptyset$ $B = \{a, ba, bb\}$
   $A = \{\varepsilon\}$ $B = \{b, aba\}$
   $A = \{aa, ab, ba\}$ $B = X^*$
6. Soit l'alphabet $X = \{a, b\}$ et les langages $L_1 = \{a, ab, ba\}$ et $L_2 = \{\varepsilon, b, ab\}$.
   (a) Donner le résultat des opérations suivantes :
   $$L_1.L_2 \quad L_2.L_1 \quad L_1.\{\varepsilon\} \quad \emptyset.L_2 \quad L_1^3$$
   (b) Si $L_3.L_4 = \{\varepsilon\}$, que peut-on dire des langages L_3 et L_4 ?
   (c) Si $L_3.L_4 = \emptyset$, que peut-on dire des langages L_3 et L_4 ?
7. Vérifier les propriétés suivantes du produit de langages :
   - Associativité
   - Distributivité par rapport à $\cup$
   - Non distributivité par rapport à $\cap$
   - Admet un élément neutre

– Admet un élément absorbant

8. (a) Soient t, u, v, w quatre mots de X^* tels que que $tu = vw$. Montrer qu'il existe un mot unique $z \in X^*$ tel que :
   – soit $u = zw$ et $v = tz$
   – soit $t = vz$ et $w = zu$
   (Lemme de Levi)
   (b) En utilisant ce lemme montrer que si u_1, u_2 et v sont trois mots de X^*, si $u_1 \in Pre(v)$ et si $u_2 \in Pre(v)$ alors soit $u_1 \in Pre(u_2)$ soit $u_2 \in Pre(u_1)$.
   (c) En utilisant ce théorème, et en appliquant un raisonnement par récurrence sur $|u|$, montrer que si $a \in X, b \in X, u \in X^*$, alors $ua = bu \Rightarrow a = b$ et $u \in \{a\}^*$.
9. Admettons la définition suivante : les mots u et v de X^* sont dits **conjugués** si et seulement si $\exists u_1, u_2$ t.q. $u = u_1u_2$ et $v = u_2u_1$. Montrer :
   (a) que la "conjugaison" est une relation d'équivalence
   (b) que si u et v sont conjugués, alors $\exists w \in X^*, k, l \in \mathbb{N}$, t.q. $u = w^l$ et $v = w^k$

Expressions rationnelles

Notation : e_i est une expression rationnelle, et L_i est le langage correspondant à e_i.

1. Soit $e_1 = a^*b^*$. Décrire L_1.
2. (a) Soient $e_2 = a(ba)^*$ et $e_2' = (ab)^*a$. A-t-on $L_2 \subset L_2'$? $L_2' \subset L_2$?
   (b) Soient $e_2 = a(a|b)^*$ et $e_2' = (a|b)^*a$. A-t-on $L_2 \subset L_2'$? $L_2' \subset L_2$? Peut-on caractériser facilement la différence entre les deux langages ?
3. Soit $L_3 = \{ab, bba, acba, babb, ccacc\}$. Donner e_3.
4. Soit $L_4 = \{u \in X^*/|u|_a = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Donner e_4.
5. Soit $e_5 = a(b|c)^*(a^*|aa^*)ba(a^*|b^*|c^*)^*$. Peut-on simplifier e_5 ?
6. Soit $e_6 = (((a|\varepsilon)|b(ac)^*c)|(b^*c|\varepsilon))$. Trouver une expression e_6' qui décrit le même langage et ne comprend pas le symbole ε.
7. Soit $e_7 = (a|b|c)(a|b|c)^*$. Y a-t-il une différence entre L_7 et $\{a, b, c\}^*$?
8. Soit L_8 = Langage des identificateurs du langage Pascal (ex. `f33`, `A_voir`, `ok`, `pMin`...). Donner e_8 [1]
9. Soit $L_9 = \{ab, abc, abcd, bc, bcd\}$. Donner e_9.
10. L_{10} est le langage sur l'alphabet {a, b} de tous les mots qui comprennent la séquence 'abb'. Donner e_{10}.
11. Proposer une expression rationnelle pour le langage L_{11} de tous les mots de $\{a, b, c\}^*$ dont *cac* est un sous-mot [2].
12. Soit l'expression rationnelle $a^*b^*c^*zc^*b^*a^*$. Soit $L_{\mathcal{E}}$ le langage correspondant à cette expression. Lequel des langages $L_{\mathcal{G}_1}$ et $L_{\mathcal{E}}$ est-il inclus dans l'autre ?
13. Soient les expressions suivantes, compatibles avec le langage des expression régulières définies dans `emacs`. Pour chacune d'entre elle, donner une expression équivalente qui n'utilise que les 3 opérations union, produit et étoile.
    a^+b*, $[0-9]?$, $[\hat{}a-z]^*$

1. On utilisera les abréviations suivantes : L = {A, B, ..., Z, a, ... z} et C = {0, 1, ..., 9}.
2. Un *sous-mot* de u est une sous-suite de lettres — non nécessairement contiguë — de u. À distinguer d'un *facteur*. Exemple : *pis* est un sous-mot de *produits*.