4.2.1 Etude de complexité

Algorithme proposé dans le TP.

```
"""Boucle principale, remplissage en biais.
l : longueur du segment couvert,
i : point de départ du segment dans le mot u
k : indice de la séparation du segment en deux"""
for l in range(2,len(u)+1):
    for i in range(0, len(u)-l+1):
        for k in range(i, i+l-1):
```

On s'intéresse au nombre de tours de boucle sans compter le parcours des règles. Soit α ce nombre.

- Première boucle : l va de 2 à n (où n est la longueur du mot à analyser). C'est ce que dénote `range(2,len(u)+1)`.
- Deuxième boucle : i va de 0 à $n-l$
- Troisième boucle : k va de i à $i+l-2$: le nombre de tours de cette boucle est donc $l-1$ $((i+l-2)-(i)+1)$.

Le nombre total de tours est donc : $\alpha = \sum_{l=2}^{n}\sum_{i=0}^{n-l}(l-1)$

La valeur sommée est constante par rapport à i : la somme $\sum_{i=0}^{n-l}(l-1)$ peut donc être calculée (en fonction de l) : c'est le nombre de tours de boucle $\times$ $(l-1)$. Le nombre de tours est $(n-l)-(0)+1 = n-l+1$. Cela donne donc $(n-l+1)(l-1)$. On a donc : $\alpha = \sum_{l=2}^{n}(n-l+1)(l-1)$

La suite va de 2 à n, mais on peut observer que le terme $(n-l+1)(l-1)$ vaut 0 quand $l=1$. On peut donc se ramener à une suite de 1 à n (ce qui permettra de récupérer plus facilement les résultats connus — somme des n premiers entiers...).

$$\alpha = \sum_{l=1}^{n}(n-l+1)(l-1)$$

Pour calculer la somme, on développe le polynôme en l :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{l=1}^{n} nl - l^2 + l - n + l - 1 \\
&= \sum_{l=1}^{n} -l^2 + nl + 2l - (n+1) \\
&= \sum_{l=1}^{n} -l^2 + \sum_{l=1}^{n} nl + \sum_{l=1}^{n} 2l - \sum_{l=1}^{n}(n+1) \\
&= -\sum_{l=1}^{n} l^2 + n\sum_{l=1}^{n} l + 2\sum_{l=1}^{n} l - \sum_{l=1}^{n}(n+1) \\
&= -\sum_{l=1}^{n} l^2 + (n+2)\sum_{l=1}^{n} l - \sum_{l=1}^{n}(n+1) \\
&= -\sum_{l=1}^{n} l^2 + (n+2)\sum_{l=1}^{n} l - n(n+1)
\end{aligned}$$

On dispose d'identités remarquables bien connues :

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+2)\frac{n(n+1)}{2} - n(n+1) \\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+2)\times 3n(n+1)}{6} - \frac{6n(n+1)}{6} \\
&= \frac{-(n^2+n)(2n+1) + (3n^2+6n)(n+1) - 6n(n+1)}{6} \\
&= \frac{-2n^3 - 2n^2 - n^2 - n \ + \ 3n^3 + 6n^2 + 3n^2 + 6n \ + \ -6n^2 - 6n}{6} \\
&= \frac{n^3 - n}{6}
\end{aligned}$$

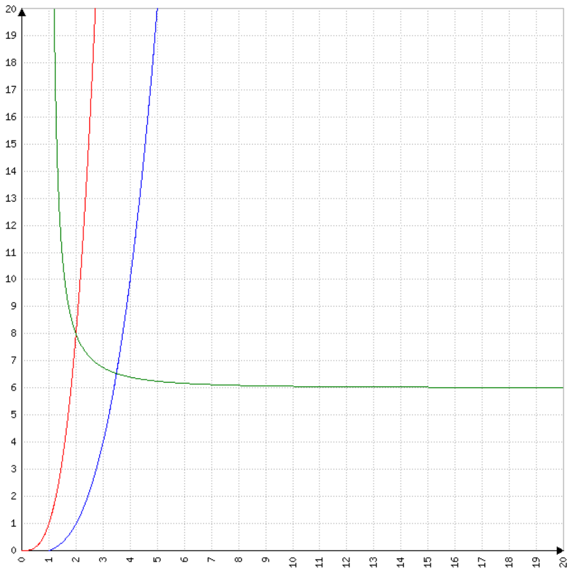

FIG. 4.6 – Courbes représentatives : $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}$; $g(x) = x^3$; $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

```
Grammaire commençant par S --> AB
    mot      cpxt the     cpxt calc    cpxt obt    obt/the
----------|-----------|-----------|----------|---------|
        ab        8.00        1.00           1       8.00
       abb       27.00        4.00           4       6.00
    aaaaab      216.00       35.00          35       6.00
        bb        8.00        1.00           1       8.00
      abab       64.00       10.00          10       6.00
       cab       27.00        4.00           4       6.00
Grammaire commençant par S --> AS
    mot      cpxt the     cpxt calc    cpxt obt    obt/the
----------|-----------|-----------|----------|---------|
        ab        8.00        1.00           1       8.00
       abb       27.00        4.00           4       6.00
    aaaaab      216.00       35.00          35       6.00
        bb        8.00        1.00           1       8.00
      abab       64.00       10.00          10       6.00
       cab       27.00        4.00           4       6.00
```