A.1 Quelques exercices corrigés

1. 33 Mettre sous forme normale de Chomsky la grammaire définie par les règles de production suivantes $S \to AB \mid aS \mid a$
$A \to Ab \mid \varepsilon$
$B \to AS$
2. 34 Eliminer la récursivité gauche de la grammaire ETF.
3. 34 Appliquer l'algorithme de dé-récursivation (gauche) vu en cours à la grammaire suivante, grammaire de la liste.
$S \to (\ L\ ) \mid a$
$L \to L, S \mid S$

$\boxed{\text{n}^o\ 1,\ \text{p } 33}$ ....

Il faut commencer par rendre la grammaire ε-libre, ce qui est assez simple dans ce cas particulier, puisque seul A est susceptible de s'effacer :

	$S' \to S \mid \varepsilon$	$S' \to S \mid \varepsilon$
$S \to AB \mid aS \mid a$	$S \to AB \mid (\varepsilon)B \mid aS \mid a$	$S \to AB \mid B \mid aS \mid a$
$A \to Ab \mid \varepsilon$	$A \to Ab \mid (\varepsilon)b$	$A \to Ab \mid b$
$B \to AS$	$B \to AS \mid (\varepsilon)S$	$B \to AS \mid S$

Il faut ensuite débarrasser la grammaire des productions singulières, qui sont exclues dans une grammaire quadratique.

L'algorithme général est le suivant :

1. Partir d'une grammaire ε-libre.
2. Pour tout $A \in V$, construire $N_A = \{B \in V \ / \ A \xrightarrow{*} B\}$
3. Soit P l'ensemble initial de règles ; on construit P' le nouvel ensemble de productions de la manière suivante :
   (a) Ajouter dans P' toutes les règles non singulières de P.
   (b) Pour toute règle $B \longrightarrow \alpha$ de P' (non singulière par hypothèse), pour tout $A \in V$ tel que $B \in N_A$, ajouter $A \longrightarrow \alpha$ à P'.

L'application systématique de l'algorithme à notre grammaire donne :

$S' \to S \mid \varepsilon$	$N_S = \{B, S\}$	$S \to AB$ non sing. ; et $S \in N_B$ donc on ajoute $B \to AB$
$S \to AB \mid aS \mid a$	$N_A = \emptyset$	$S \to aS$ non sing. ; et $S \in N_B$ donc on ajoute $B \to aS$
$A \to Ab \mid b$	$N_B = \{B, S\}$	$S \to a$ non sing. ; et $S \in N_B$ donc on ajoute $B \to a$
$B \to AS$		$B \to AS$ non sing. ; et $B \in N_S$ donc on ajoute $S \to AS$

Cela donne la grammaire suivante, qu'il est alors simple de rendre quadratique :

$S' \to S \mid \varepsilon$	$S' \to S \mid \varepsilon$
$S \to AS \mid AB \mid aS \mid a$	$S \to AS \mid AB \mid XS \mid a$
$A \to Ab \mid b$	$X \to a$
$B \to AS \mid AB \mid aS \mid a$	$A \to AY \mid b$
	$Y \to b$
	$B \to AS \mid AB \mid XS \mid a$

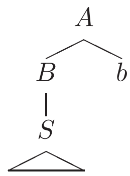
Il y a deux cycles imbriqués dans la grammaire ε-libre ($S \xrightarrow{*} B \xrightarrow{*} S$), ce qui explique qu'*in fine* S et B engendrent le même langage. Cela suggère une simplication de la grammaire, mais ce n'était pas demandé ici.

à propos de la simplication : dans le cas particulier de cette grammaire, il aurait été possible de se contenter de la grammaire :

$S' \to S \mid \varepsilon$
$S \to AS \mid AB \mid aS \mid a$
$A \to Ab \mid b$
$B \to AS$

... mais cela tient au fait que B n'est atteint que par S, dans la règle $A \to AB$, et que par conséquent tout ce qu'on perd en supprimant la dérivation $B \to S$ est « rattrapé » par la dérivation $S \to AS$.

Si dans la grammaire initiale on avait en en plus $A \to Bb$, par exemple, alors il n'en aurait pas été de même : en supprimant la règle $B \to S$ sans ajouter toutes les dérivations d'origine B que nous avons ajoutées, on perdrait certaines possibilités de dérivation, par exemple :



Sans préjuger du fait que dans ce cas particulier, le langage engendré peut ne pas être différent.

n^o 2, p 33 ....

$E \to TE'$
$E' \to +TE' \mid \varepsilon$
$T \to FT'$
$T' \to \times FT' \mid \varepsilon$
$F \to (E) \mid a$

n^o 3, p 33 ....

Corrigé : On a une seule règle récursive gauche (directe) et aucune indirecte. A la place du couple règle récursive gauche $L \to L, S$ plus règle de terminaison de la récursion $L \to S$, on commence par dériver la terminaison par S avec la nouvelle règle $L \to SL'$ puis c'est L' qui capte la récursion $L' \to, SL'$ ou bien termine $L' \to \varepsilon$.