

1. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

- (1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
- (2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
- (3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
- (4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
- (5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
- (6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

2. Après avoir fait apparaître les différentes propositions élémentaires (atomiques) qui la constituent, et avoir associé à ces propositions des lettres, proposer une formule qui a les mêmes conditions de vérité que chacune des phrases suivantes :

- (1) a. En cas de mauvais temps, ou si trop de participants sont malades, la soirée sera annulée  
b. Si Pierre vient, je ne le recevrai pas.  
c. Charles viendra avec Marie.  
d. Jean vient seulement si Pierre ne vient pas.  
e. Si tu as froid, il y a une couverture dans le placard.  
f. Nous partirons, à moins qu'il pleuve.  
g. Jean est parti sans prévenir Marie.  
h. Jean s'est trompé, tout comme moi, quoi qu'il en dise.  
i. Jean allait souvent boulevard Diderot, où habitait son père.
- (2) a. Pour que la fête soit réussie, il faut que l'alcool coule à flots  
b. Il suffit que l'alcool coule à flot pour que la fête soit réussie  
c. Pour que Jean tombe, il suffit que tu le pousses

3. Montrer que, quelles que soient  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$ , les formules de chacune des paires suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- |      |                                   |  |                |
|------|-----------------------------------|--|----------------|
| (1)  | $\neg\neg\varphi$                 | $\varphi$  |                |
| (2)  | $\varphi \rightarrow \psi$        | $\neg\varphi \vee \psi$  |                |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$        | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$                                |                |
| (3)  | $\varphi \rightarrow \psi$        | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$                             | contraposition |
| (4)  | $\varphi \leftrightarrow \psi$    | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ |                |
| (5)  | $\varphi \leftrightarrow \psi$    | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$     |                |
| (6)  | $\varphi \vee \varphi$            | $\varphi$  | idempotence    |
| (8)  | $\varphi \vee \psi$               | $\psi \vee \varphi$  | commutativité  |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$   | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$                                | associativité  |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$             | distributivité |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$       | $\neg\varphi \vee \neg\psi$                                    | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$         | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$                                  | "              |

4. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de  $L_p$  ?

- |     |   |     |   |      |                            |
|-----|---|-----|---|------|----------------------------|
| (1) | $\neg(\neg P \vee Q)$                                       | (5) | $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$               | (9)  | $(P \vee (Q \vee R))$      |
| (2) | $P \vee (Q)$  | (6) | $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) | $\neg P \vee Q \vee R$     |
| (3) | $\neg(Q)$   | (7) | $((P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$           | (11) | $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) | $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) | $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$   | (12) | $(P \vee P)$               |

5. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
- (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
- (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
- (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen

6. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

- (3) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente  
 b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente  
 c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente  
 d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente  
 e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente  
 f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

- Situations : (4) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente  
 b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente  
 c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

7. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité. Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'autre d'un dragon. Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse. Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?*

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.

$P$  = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;

$Q$  = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

8. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

- (5) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.  
 b. Il est faux que Paul est venu.  
 c. Jean et Marie ne viendront que si le métro fonctionne  
 d. Jean viendra, à moins bien sûr que Marie ne vienne pas

9. Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnements corrects ?

- (6) a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.  
 b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.  
 c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.  
 d. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.  
 e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.

10. Montrer que les connecteurs  $\wedge$  et  $\neg$  sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ( $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) est équivalente à une formule ne comprenant que  $\wedge$  et  $\neg$ .