

Equivalences remarquables

- Les variables sont « muettes » :

$$\begin{aligned}\forall x Fx &\equiv \forall y Fy \\ \text{Mais attention à la « capture » :} \\ \forall x (Fx \wedge Gy) &\not\equiv \forall y (Fy \wedge Gy)\end{aligned}$$

- Règles de dualité (loi de *de Morgan*)

$$\begin{aligned}\forall x \alpha &\equiv \neg \exists \neg \alpha \\ \text{par exemple :} \\ \forall x Ex &\equiv \neg \exists \neg Ex \\ \text{Tout est éphémère} &\approx \text{Rien n'est éternel} (\approx \text{non éphémère}) \\ \forall x (Px \rightarrow Gx) &\equiv \neg \exists x (Px \wedge \neg Gx) \\ \text{Tous les profs sont gentils} &\approx \text{Il n'y a pas de prof non gentil} \\ \text{Autres formes :} \\ \exists x \alpha &\equiv \neg \forall x \neg \alpha \\ \neg \exists x \alpha &\equiv \forall x \neg \alpha \\ \neg \forall x \alpha &\equiv \exists x \neg \alpha\end{aligned}$$

- Règles de distribution :

$$\begin{aligned}\forall x (\alpha \wedge \beta) &\equiv (\forall x \alpha \wedge \forall x \beta) \\ \text{Tout est rare et cher} &\approx \text{Tout est rare et tout est cher} \\ \text{Mais :} \\ \forall x (\alpha \vee \beta) &\not\equiv (\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \\ \text{Tout est soit éphémère soit durable} &\not\approx \text{Soit tout est éphémère soit tout est durable} \\ \exists x (\alpha \vee \beta) &\equiv (\exists x \alpha \vee \exists x \beta) \\ \text{Mais :} \\ \exists x (\alpha \wedge \beta) &\not\equiv (\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \\ \exists x (\alpha \rightarrow \beta) &\equiv (\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta)\end{aligned}$$

- Règles de distribution conditionnelle ($\bar{\beta}$ ne contient pas d'occurrence libre de x)

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &\equiv \forall x \bar{\beta} \\ \bar{\beta} &\equiv \exists x \bar{\beta} \\ \forall x (\alpha \vee \bar{\beta}) &\equiv (\forall x \alpha \vee \bar{\beta}) \\ \exists x (\alpha \wedge \bar{\beta}) &\equiv \exists x \alpha \wedge \bar{\beta} \\ \forall x (\alpha \rightarrow \bar{\beta}) &\equiv \exists x \alpha \rightarrow \bar{\beta} \\ \text{Toute entité est telle que si elle se casse, il y a du bruit} &\approx \text{Si quelque chose se casse, il y a du bruit} \\ \forall x (\bar{\beta} \rightarrow \alpha) &\equiv \bar{\beta} \rightarrow \forall x \alpha \\ \text{Pour toute personne, s'il y a du bruit, elle est fâchée} &\approx \text{S'il y a du bruit, tout le monde est fâché}\end{aligned}$$