### 5.1.1 Systèmes de traduction

#### Grammaires dans $X^* \times Y^*$

Soient $X$ et $Y$ deux alphabets (pas nécessairement disjoints). Alors on peut parler de $X^* \times Y^* : \{(f,g)/f \in X^*, g \in Y^*\}$.

On peut définir une grammaire sur $X^* \times Y^*$ : les règles ont la forme habituelle, mais les terminaux sont des couples. Forme générale d'une règle : $A \longrightarrow u_1 A_1 u_2 A_2 \ldots u_p A_p u_{p+1}$, avec $A$, $A_i \in V$, et $u_i \in X^* \times Y^*$, c'est-à-dire que les $u_i$ sont de la forme $u_i = (f_i, g_i)$, avec $f_i \in X^*$ et $g_i \in Y^*$.

**Exemple**
$$\begin{aligned} S &\longrightarrow (a,\varepsilon)S(\varepsilon,a) \\ S &\longrightarrow (b,\varepsilon)S(\varepsilon,b) \\ S &\longrightarrow (a,a) \mid (b,b) \mid (\varepsilon,\varepsilon) \end{aligned}$$

Le mot $(abaa, aaba)$ est engendré :

$S \to (a,\varepsilon)S(\varepsilon,a) \to (a,\varepsilon)(b,\varepsilon)S(\varepsilon,b)(\varepsilon,a) \to (a,\varepsilon)(b,\varepsilon)(a,\varepsilon)S(\varepsilon,a)(\varepsilon,b)(\varepsilon,a)$
$\to (a,\varepsilon)(b,\varepsilon)(a,\varepsilon)(a,\varepsilon)S(\varepsilon,a)(\varepsilon,a)(\varepsilon,b)(\varepsilon,a) \to (a,\varepsilon)(b,\varepsilon)(a,\varepsilon)(a,\varepsilon)(\varepsilon,\varepsilon)(\varepsilon,a)(\varepsilon,a)(\varepsilon,b)(\varepsilon,a)$

Il faut définir une nouvelle version de la concaténation : $(u,v)(u',v') = (uu', vv')$.
Cette nouvelle opération a le bon goût d'être associative.
Alors on a bien $(a,\varepsilon)(b,\varepsilon)(a,\varepsilon)(a,\varepsilon)(\varepsilon,\varepsilon)(\varepsilon,a)(\varepsilon,a)(\varepsilon,b)(\varepsilon,a) = (abaa, aaba)$

Cette grammaire engendre $(f, \tilde{f})$.

**Déf. 1 (Système de traduction)**

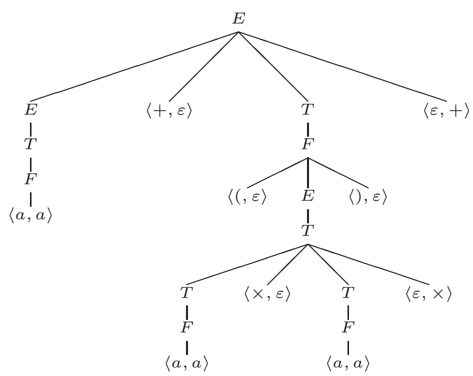
On appelle *système de traduction* une grammaire sur $X^* \times Y^*$.
On dit alors que $g$ est la *traduction* de $f$ si $S \xrightarrow{*} (f,g)$.

**Exemple (classique)**

$X = \{+, \times, a, (,)\}$ ; $Y = \{+, \times, a\}$

$E \to E\langle +,\varepsilon\rangle T\langle \varepsilon,+\rangle$
$E \to T$
$T \to T\langle \times,\varepsilon\rangle F\langle \varepsilon,\times\rangle$
$T \to F$
$F \to \langle a,a\rangle$
$F \to \langle (,\varepsilon\rangle E\langle ),\varepsilon\rangle$

*Traduit les expressions infixes en postfixes ;*
ex. $\langle a + (a \times a), a\,a\,a\ \times + \rangle$



#### Utilisation des systèmes de traduction

Pratiquement, il n'y a pas d'intérêt à utiliser de tels systèmes de traduction pour *générer* des mots sur $X^* \times Y^*$. Ce qu'on voudrait, plutôt, c'est utiliser ces grammaires pour résoudre des problèmes de traduction.

**Déf. 2 (Problème de traduction)**

Le problème de traduction consiste à répondre à la question suivante :

*Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$*, trouver* $g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$ *tel que* $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$

Pour répondre pratiquement à cette question, on va commencer par découpler les deux « jeux » de règles.

Soit $\mathcal{G}$ un système de traduction sur $X^* \times Y^*$. On peut tirer de $\mathcal{G}$ deux grammaires, l'une sur $X^*$, et l'autre sur $Y^*$ : pour chaque règle $A \longrightarrow u_1 A_1 u_2 \dots$ de $\mathcal{G}$, avec $u_i = (f_i, g_i)$, on peut définir la règle $A \longrightarrow f_1 A_1 f_2 \dots$ pour $\mathcal{G}_1$, et la règle $A \longrightarrow g_1 A_1 g_2 \dots$ pour $\mathcal{G}_2$.

Alors à chaque règle de $\mathcal{G}_1$ correspond une règle de $\mathcal{G}_2$, et réciproquement.

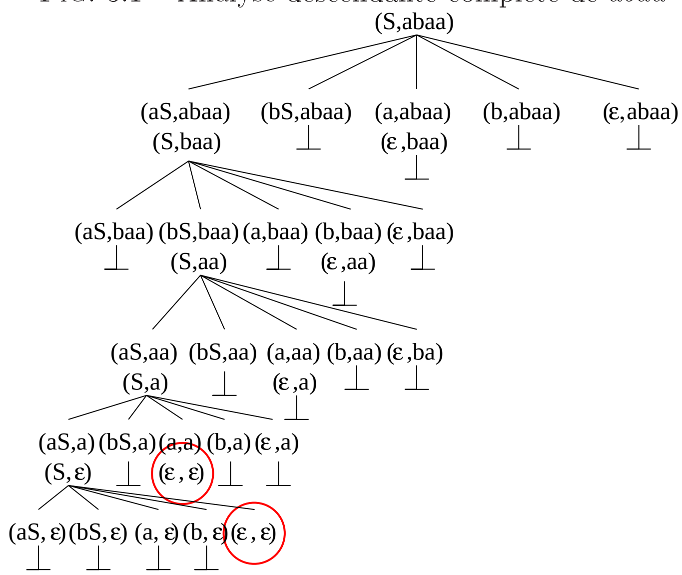
**Exemple** en reprenant la grammaire ETF précédente, on obtient comme grammaire sur $Y^*$ $(\mathcal{G}_2)$ : $E \rightarrow ET + \mid T$

$T \rightarrow TF \times \mid F$

$F \rightarrow a \mid E$

On dispose alors d'une méthode de traduction effective : on réalise une analyse syntaxique du mot $f$, qui nous indique le n° de chaque règle de $\mathcal{G}_1$ utilisée. Alors il suffit d'utiliser « en parallèle » les règles de $\mathcal{G}_2$ pour engendrer la traduction de $f$.

FIG. 5.1 – Analyse descendante complète de *abaa*




Soit le mot *abaa*. La grammaire $\mathcal{G}_1$ peut s'écrire $S \rightarrow aS \mid bS \mid a \mid b \mid \varepsilon$. Une analyse descendante pourrait prendre la forme représentée à la figure 5.1. Les deux chemins possibles, si on numérote les règles de 1 à 5, correspondent aux règles (1,2,1,3) et (1,2,1,1,5). Il ne reste plus qu'à appliquer les règles correspondantes de la grammaire $\mathcal{G}_2$, ici $S \rightarrow Sa \mid Sb \mid a \mid b \mid \varepsilon$. Cela donne : $S \rightarrow Sa \rightarrow Sba \rightarrow Saba \rightarrow aaba$.

**Remarque** Avec une analyse descendante, on peut faire la traduction en même temps que l'analyse (même s'il y a du backtrack). Si on fait une analyse ascendante, il faut attendre que l'analyse soit terminée pour faire la traduction.