expression qui le dénote.

Pour alléger les notations (et limiter le nombre de parenthèses), on imposera les règles de priorité suivantes : l'étoile ($\star$) est l'opérateur le plus liant, puis la concaténation, puis l'union (+). Ainsi, $aa^\star + b^\star$ s'interprète-t-il comme $((a(a^\star)) + (b^\star))$.

2.1.3 Équivalence et réductions

La correspondance entre expression et langage n'est pas biunivoque : chaque expression dénote un unique langage, mais à un langage donné peuvent correspondre plusieurs expressions différentes. Ainsi, les deux expressions suivantes : $a^\star(a^\star ba^\star ba^\star)^\star$ et $a^\star(ba^\star ba^\star)^\star$ sont-elles en réalité deux variantes notationnelles du même langage sur $\Sigma = \{a, b\}$.

Définition 2.3 (Expressions rationnelles équivalentes). *Deux expressions rationnelles sont équivalentes si elles dénotent le même langage.*

Comment déterminer automatiquement que deux expressions sont équivalentes ? Existe-t-il une expression canonique, correspondant à la manière la plus courte de dénoter un langage ? Cette question n'est pas anodine : pour calculer efficacement le langage associé à une expression, il semble préférable de partir de la version la plus simple, afin de minimiser le nombre d'opérations à accomplir.

Un élément de réponse est fourni avec les formules de la [Table 2.1](#), qui expriment, (par le signe =), un certain nombre d'équivalences élémentaires :

$\emptyset e = e\emptyset = \emptyset$	$\varepsilon e = e\varepsilon = e$
$\emptyset^\star = \varepsilon$	$\varepsilon^\star = \varepsilon$
$e + f = f + e$	$e + \emptyset = e$
$e + e = e$	$e^\star = (e^\star)^\star$
$e(f + g) = ef + eg$	$(e + f)g = eg + fg$
$(ef)^\star e = e(fe)^\star$	
$(e + f)^\star = e^\star(e + f)^\star$	$(e + f)^\star = (e^\star + f)^\star$
$(e + f)^\star = (e^\star f^\star)^\star$	$(e + f)^\star = (e^\star f)^\star e^\star$

TABLE 2.1 – Identités rationnelles

En utilisant ces identités, il devient possible d'opérer des transformations purement syntaxiques (c'est-à-dire qui ne changent pas le langage dénoté) d'expressions rationnelles, en particulier pour les simplifier. Un exemple de réduction obtenue par application de ces expressions est le suivant :

$$\begin{aligned}
 bb^\star(a^\star b^\star + \varepsilon)b &= b(b^\star a^\star b^\star + b^\star)b \\
 &= b(b^\star a^\star + \varepsilon)b^\star b \\
 &= b(b^\star a^\star + \varepsilon)bb^\star
 \end{aligned}$$

La conceptualisation algorithmique d'une stratégie efficace permettant de réduire les expressions rationnelles sur la base des identités de la [Table 2.1](#) étant un projet difficile, l'approche la plus utilisée pour tester l'équivalence de deux expressions rationnelles n'utilise pas directement ces identités, mais fait plutôt appel à leur transformation en des automates finis, qui sera présentée dans le chapitre suivant (à la [section 3.2.2](#)).