4.4.1 Equivalences remarquables

- Les équivalences de la logique propositionnelle tiennent. Par exemple,

$$(Px \rightarrow Qx) \equiv \neg(Px \wedge \neg Qx)$$
$$\exists x\ (Px \wedge Qx) \equiv \exists x\ \neg(\neg Px \vee \neg Qx)$$

- Interdéfinissabilité des quantificateurs.

$$\forall x\ \varphi \equiv \neg\exists x \neg\varphi$$
$$\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi$$
$$\vdots$$

- Cas particulier de la quantification avec restriction.

$$\forall x\ (A \rightarrow B) \equiv \neg\exists x\ (A \wedge \neg B)$$
$$\exists x\ (A \wedge B) \equiv \neg\forall x\ (A \rightarrow \neg B)$$
$$\vdots$$

- Cas des formules fermées (en x).

$$\varphi \equiv \exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \varphi^4$$

Cette équivalence donne la possibilité de « sortir » ou de « faire entrer » des formules de la portée des quantificateurs sans changer la valeur de la formule :

$$\begin{array}{ccll} \exists x\ (\varphi \wedge \psi) & \equiv & (\exists x\ \varphi \wedge \psi) & \text{si } x \notin VL(\psi) \\ \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) & \equiv & (\forall x\ \varphi \rightarrow \psi) & \text{si } x \notin VL(\psi) \\ \psi \rightarrow \forall x\ \varphi & \equiv & \forall x\ (\psi \rightarrow \varphi) & \text{si } x \notin VL(\psi) \\ & \text{etc.} & & \end{array}$$

- Cas de « distribution » : certaines marchent mais pas toutes :

$$\begin{array}{ccc} \forall x\ (\varphi \wedge \psi) & \equiv & \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi \\ \exists x\ (\varphi \vee \psi) & \equiv & \exists x\ \varphi \vee x\ \psi \\ \forall x\ (\varphi \vee \psi) & \not\equiv & \forall x\ \varphi \vee \forall x\ \psi \\ \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) & \not\equiv & \forall x\ \varphi \rightarrow \forall x\ \psi \\ \exists x\ (\varphi \wedge \psi) & \not\equiv & \exists x\ \varphi \wedge x\ \psi \end{array}$$

[4] si $x \notin VL(\varphi)$, où $VL(\varphi)$ est l'ensemble des variables libres de la formule φ.