Logique des Prédicats

Logique des prédicats : modèles, équivalences, etc.

1. **Syllogisme**

   (a) Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats

   (1) a. Tout ce que Jean n'a pas perdu, il l'a.
       b. Jean n'a pas perdu un million de francs.
       c. Jean a un million de francs.

   (b) Analyser le syllogisme qui consiste à déduire de la conjonction de (1-a) et de (1-b) la conclusion (1-c). Expliquer où se situe l'erreur de raisonnement.

2. **Modèles** Soit $M = \langle U, I \rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
   $I(a) =$ Alain ; $I(b) =$ Béatrice ; $I(c) =$ Christine ; $I(d) =$ David
   $I(H) =$ {Alain, David} ; $I(F) =$ {Christine, Béatrice}
   $I(A) = \{\langle\text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle\text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{Alain}, \text{David}\rangle\}$
   $I(D) = \{\langle\text{Christine}, \text{David}\rangle, \langle\text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$

   a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :
   a. $D(d, b)$
   b. $H(d) \wedge D(c, d)$
   c. $D(d, b) \rightarrow F(a)$
   d. $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a, c))$

   b. Construisez le modèle $M' = \langle D, I' \rangle$, tel que (i) M' a le même domaine d'individus que M, (ii) I' associe la même dénotation que I aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans M' :
   a. $H(c) \wedge H(a)$
   b. $\forall x\, (H(x) \rightarrow A(x, c))$
   c. $A(a, c) \rightarrow D(c, a)$
   d. $\exists x \exists y\, ((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x, y)) \vee (H(x) \wedge F(y) \wedge A(y, x)))$

3. **Modèles** La figure 1 représente un modèle.

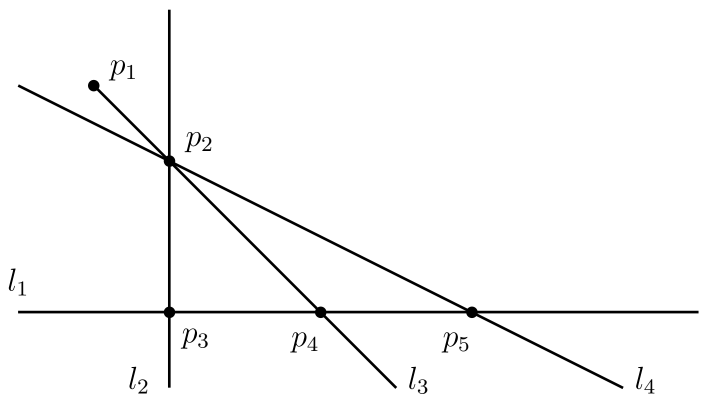

FIG. 1 – Un modèle

Le modèle est constitué des éléments suivants :
– son domaine est l'ensemble des points p_i et des lignes l_i de la figure

- on considère les prédicats suivants :
  - P un prédicat unaire, $P(x)$: "*x est un point*"
  - L un prédicat unaire, $L(x)$: "*x est une ligne*"
  - S un prédicat binaire, $S(x,y)$: "*x est sur y*"
  - E un prédicat ternaire, $E(x,y,z)$: "*y est entre x et z*"

(a) Donnez l'extension de chacun des prédicats.

(b) Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes dans le modèle ci-dessus :

(2) a. $\forall x(Lx \leftrightarrow \exists y Sxy)$
b. $\forall x \forall y((Lx \wedge Ly) \rightarrow \exists z(Pz \wedge Szx \wedge Szy))$
c. $\forall x \forall y((Px \wedge Py) \rightarrow \exists z(Lz \wedge Sxz \wedge Syz))$
d. $\exists x \exists y \forall z(Pz \rightarrow (Szx \vee Szy))$
e. $\forall x \forall y \forall z(Exyz \leftrightarrow Ezyx)$
f. $\forall x(Lx \rightarrow \exists y \exists z \exists w(Syx \wedge Szx \wedge Swx \wedge Eyzw))$
g. $\forall x(\exists y_1 \exists y_2(y_1 \neq y_2 \wedge Sxy_1 \wedge Sxy_2) \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 Ez_1 x z_2)$

4. Proposer plusieurs phrases en français qui ont les mêmes conditions de vérité que la formule suivante, où $F(x)$ = x est fermier, $P(x,y)$ = x possède y, et $B(x,y)$ = x bat y.
$$\forall x \forall y((F(x) \wedge P(x,y)) \rightarrow B(x,y))$$
Même question pour les formules suivantes ($P(x,y)$ = x parle à y, j = Jean, m = Marie, $C(x,y)$ = x croit y, $H(x)$ = x est une personne, $A(x)$ = x est un âne) :

(3) a. $(\neg P(j,m) \rightarrow \forall x(x \neq j \rightarrow \neg P(j,x)))$
b. $\neg \forall x((H(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow C(y,x))) \rightarrow C(m,x))$
c. $\forall x(F(x) \rightarrow \neg \exists y(A(y) \wedge P(x,y)))$

5. Montrez que les formules de chacune des paires ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes, en donnant l'exemple d'une situation où l'une est vraie et pas l'autre.

(4) a. $\forall x(A \vee B)$ *vs.* $(\forall xA \vee \forall xB)$
b. $\exists x(A \wedge B)$ *vs.* $(\exists xA \wedge \exists xB)$

6. Les équivalences suivantes sont conditionnées par le fait que la variable x soit non libre dans une des sous-formules. Montrez comment l'équivalence est en effet perdue si on ne vérifie pas la condition.

(5) a. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\varphi \wedge \psi)$ *si x n'est pas libre dans ψ.*
b. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \exists x\psi)$ *si x n'est pas libre dans φ.*
c. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$ *si x n'est pas libre dans ψ.*
d. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ *si x n'est pas libre dans φ.*

7. **Équivalences** En partant de la formule $\exists x(Px \wedge Gx)$ (pour *il y a des profs gentils*) et de la formule $\exists x(Px \wedge \neg Gx)$, vérifiez que l'on peut déduire toutes les formules du

carré d'opposition en utilisant les équivalences propositionnelles, ainsi que l'équivalence

$$\forall x \neg \varphi \equiv \neg \exists x \varphi$$

8. Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats. Donnez les formules les plus « naturelles », et donnez toutes les formules en cas d'ambiguïté :

(6)
a. Jean se fâche dès que Marie est en retard
b. Jean lui en veut dès que Marie est en retard
c. Dès que tout le monde fait du bruit, Jean se fâche
d. Jean se fâche dès que quelqu'un fait du bruit
e. Tout le monde se fâche dès que Marie est en retard
f. Tout le monde se fâche si tout le monde est en retard
g. Tout le monde se fâche si quelqu'un est en retard
h. Tout le monde lui en veut si Marie fait du bruit
i. Tout le monde lui en veut si quelqu'un est en retard
j. Tout le monde est marqué par un amour déçu
k. Marie ne croit pas quelqu'un à qui tout le monde fait confiance
l. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer
m. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.
n. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
o. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents.
p. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.
q. Tout le monde a lu un livre de logique.
r. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.
s. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.
t. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.

9. Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes. Conclusion ?

(7)
a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper
b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper
c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes

Quantificateurs et prédicats

1. Pour chacune de ces formules du calcul des prédicats, indiquez (a) s'il s'agit d'une négation, une conjonction, une disjonction, une implication, une formule universelle ou une formule existentielle ; (b) la portée des quantificateurs ; (c) les variables libres ; (d) s'il s'agit d'une phrase.
   (i) $(\exists x A(x, y) \wedge B(x))$
   (ii) $\exists x(A(x, y) \wedge B(x))$
   (iii) $\exists x \exists y(A(x, y) \rightarrow B(x))$
   (iv) $\neg \exists x \exists y(A(x, y) \rightarrow B(x))$
   (v) $\forall x \forall y((A(x, y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists w C(x, w))$

2. Pour chacune de ces formules du calcul des prédicats, construisez l'arbre de construction de la formule, et indiquez (sur l'arbre) la portée de chaque quantificateur.
   (i) $\exists x(A(x,y) \wedge B(x))$
   (ii) $\forall x(\neg\forall y(P(y) \rightarrow A(x,y)) \leftrightarrow B(x))$
   (iii) $\exists x\exists y(A(x,y) \rightarrow B(x))$
   (iv) $\forall x\forall y((A(x,y) \wedge B(y)) \rightarrow \exists w C(x,w))$

3. **Présupposition et égalité** Russel proposait de représenter au même niveau le contenu présupposé et le contenu asserté d'une proposition. Par exemple, pour *C'est Marcel qui est coupable* on aurait la formule $\exists x\, C(x) \wedge C(m)$ (il existe un coupable et Marcel est coupable). De même, pour *Le Roi de France est chauve*, on aurait la formule suivante[1] $\exists x\, RdF(x) \wedge \forall y\, (RdF(y) \rightarrow y = x) \wedge C(x)$.
   Proposer une représentation dans le même esprit pour chacun des énoncés suivants.

(8) a. Jean aussi est venu.
    b. Léa a réussi son ascension.
    c. Seul le facteur est passé.
    d. Paul s'est fait voler sa voiture.

4. **Donkey sentences** Les phrases suivantes se caractérisent par le fait que l'indéfini, sous la portée d'une quantification universelle, s'interprète de façon universelle. Cette situation n'est pas surprenante si on connaît l'équivalence entre $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\exists x\varphi \rightarrow \psi)$ (si ψ ne contient pas d'occurrence libre de x). Sur la base de cette équivalence, proposez pour chaque phrase deux traductions en logique des prédicats équivalentes. Est-ce possible pour tous les exemples ?

(9) a. Paul se fâche dès que quelqu'un fait du bruit.
    b. Tout le monde se fâche si quelqu'un fait du bruit.
    c. Tous les touristes qui visitent Paris sont riches.
    d. Tous les touristes qui visitent Paris l'aiment.
    e. Tous les touristes qui visitent une ville sont riches.
    f. Tous les touristes qui visitent une ville l'aiment.

5. Traduisez les quatre propositions du carré d'opposition en logique des prédicats. Dans chaque cas, il y a deux possibilités de traduction, avec les deux quantificateurs.

[1]La logique avec égalité est nécessaire pour d'exprimer formellement l'unicité.