Logique propositionnelle modale

Logique avancée

2009

1 Syntaxe du langage LM_0

Définition 1 (Vocabulaire)

1. un ensemble (possiblement infini) de lettres propositionnelles $\{p\ ;\ q\ ;\ r\ ;\ \ldots\ ;\ p_1\ ;\ p_2\ ;\ \ldots\}$;
2. un jeu de connecteurs $\{\neg\ ;\ \wedge\ ;\ \vee\ ;\rightarrow;\leftrightarrow\}$;
3. les parenthèses ( ) ;
4. les symboles $\Box$ et $\Diamond$.

FBF = formule bien formée

Définition 2 (Syntaxe)

1. les lettres propositionnelles sont des FBF ;
2. si φ et ψ sont des FBF, alors $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ $(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ le sont aussi ;
3. si φ est une FBF, $\Box\varphi$ et $\Diamond\varphi$ sont des FBF.

2 Sémantique de LM_0

Définition 3 (Ensemble $\mathcal{W}$)
On se donne un ensemble $\mathcal{W}$, possiblement infini, de symboles. $\mathcal{W} = \{w_1\ ;\ w_2\ ;\ w_3\ ;\ \ldots\}$.
$\mathcal{W}$ est l'ensemble des mondes possibles.

Définition 4 (Relation d'accessibilité)
Une relation d'accessibilité, notée R, est une relation binaire sur $\mathcal{W}$.
Notation : $w_1\ R\ w_2$ pour signifier que le monde w_2 est accessible à w_1.

Définition 5 (Valuation)
Une valuation, notée V, est une fonction qui pour chaque monde w de $\mathcal{W}$ associe à chaque lettre porpositionnelle une valeur de vérité (0 ou 1).
Notation : $V_w(p) = 1$ pour signifier que p est vraie dans le monde w.
Variante : $V(w, p) = 1$.

Définition 6 (Modèle)
Un modèle, $\mathcal{M}$, de logique modale est composé d'un ensemble $\mathcal{W}$, d'une relation R et d'une fonction V.
$\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$.

Définition 7 (Structure)
Un ensemble de mondes $\mathcal{W}$ muni d'une relation d'accessibilité R s'appelle une structure (appelée aussi *frame* en anglais). Une structure est généralement notée $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, R \rangle$.

On détermine la valeur de vérité de toute formule de LM_0 par rapport à un modèle $\mathcal{M}$ et un monde w.

Notation 1
$V_{\mathcal{M},w}(\varphi)$ représente la valeur de vérité de φ par rapport à $\mathcal{M}$ et w.
$V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$ signifie que φ est vraie dans le monde w pour le modèle $\mathcal{M}$.
Variantes : $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w} = 1$ ou $\mathcal{M} \models_w \varphi$ ou $\models_{\mathcal{M},w} \varphi$

Définition 8 (Sémantique de $\mathbf{LM}_0$)
Soit le modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$ et w un monde de $\mathcal{W}$.

1. $V_{\mathcal{M},w}(p) = V_w(p)$ pour toute lettre propositionnelle p ;
2. (a) $V_{\mathcal{M},w}(\neg\varphi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 0$;
   (b) $V_{\mathcal{M},w}(\varphi \wedge \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$ et $V_{\mathcal{M},w}(\psi) = 1$;
   (c) $V_{\mathcal{M},w}(\varphi \vee \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$ ou $V_{\mathcal{M},w}(\psi) = 1$;
   (d) $V_{\mathcal{M},w}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 0$ ou $V_{\mathcal{M},w}(\psi) = 1$;
   (e) $V_{\mathcal{M},w}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = V_{\mathcal{M},w}(\psi)$;
3. (a) $V_{\mathcal{M},w}(\Box\varphi) = 1$ ssi pour tout monde $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $w \; R \; w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$;
   (b) $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\varphi) = 1$ ssi il existe au moins un monde $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $w \; R \; w'$ et $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$.

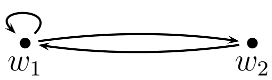
Définition 9 (Validité(s))

- φ est valide dans $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$ ssi pour tout $w \in \mathcal{W}$, $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.
  Notation : $\mathcal{M} \models \varphi$.
- φ est valide dans $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, R \rangle$ ssi $\mathcal{M} \models \varphi$ pour tout modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$.
  Notation : $\mathcal{F} \models \varphi$.
- φ est valide ssi quelle que soit la structure $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models \varphi$.
  Notation : $\models \varphi$.

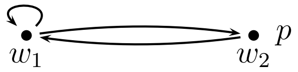
3 Application

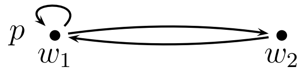
Soit la structure $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, R \rangle$, avec $\mathcal{W} = \{w_1 \; ; \; w_2\}$ et R définie telle que : $w_1 \; R \; w_2$, $w_1 \; R \; w_1$ et $w_2 \; R \; w_1$.

On représente graphiquement $\mathcal{F}$ de la manière suivante :

$\mathcal{F}$:


Soit la valuation V telle que $V_{w_1}(p) = 0$ et $V_{w_2}(p) = 1$. On représente alors le modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$ par la figure de gauche ci-dessous :

$\mathcal{M}$:


$\mathcal{M}'$:


La figure de droite représente le modèle $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}, R, V' \rangle$ avec $V'_{w_1}(p) = 1$ et $V'_{w_2}(p) = 0$.

1. Soit le modèle $\mathcal{M}_3 = \langle \mathcal{W}^3, R^3, V^3 \rangle$ avec $\mathcal{W}^3 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $w_1 \; R^3 \; w_2$, $w_2 \; R^3 \; w_2$, $w_2 \; R^3 \; w_3$ et $V^3_{w_1}(p) = 1$, $V^3_{w_2}(p) = 1$, $V^3_{w_3}(p) = 0$.
   (a) Dessinez le modèle $\mathcal{M}^3$.
   (b) Calculez la valeur de $\Box p$, $\Diamond p$, $\Box\neg p$ et $\Diamond\neg p$ pour chacun des trois mondes de $\mathcal{M}^3$.

2. Calculez (dans $\mathcal{M}$) :
   (a) $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box\Diamond p)$ et $V_{\mathcal{M},w_2}(\Box\Diamond p)$,
   (b) $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond\Box\neg p)$ et $V_{\mathcal{M},w_2}(\Diamond\Box\neg p)$.
3. Calculez (dans $\mathcal{M}'$) :
   (a) $V_{\mathcal{M}',w_1}(\Box p \to \Box\Box p)$, $V_{\mathcal{M}',w_2}(\Box p \to \Box\Box p)$,
   (b) $V_{\mathcal{M}',w_1}(\neg\Box p)$, $V_{\mathcal{M}',w_2}(\neg\Box p)$,
   (c) $V_{\mathcal{M}',w_1}(p \to \Box\Diamond p)$, $V_{\mathcal{M}',w_2}(p \to \Box\Diamond p)$.

4 Formules remarquables

(d_1) $\neg\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$ et $\neg\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\neg\varphi$ (dualité)

(d_2) $\neg\Diamond\neg\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$ et $\neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$ (dualité)

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ (nommé d'après Kripke)

(T) $\Box\varphi \to \varphi$ (nécessité)

(P) $\varphi \to \Box\varphi$

(L) $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$

(M) $\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

(B) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

(D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$

(Q) $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$

(f) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$

(R) $\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$

(G) $\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Règle de « nécessitation » :

(N) si $\vdash \varphi$ alors $\vdash \Box\varphi$
(version « sémantique » : si φ est une tautologie, $\Box\varphi$ est une tautologie).

5 Propriétés de relations binaires

Soit A un ensemble non vide et R une relation binaire sur A. x, y et z sont des éléments de A.

Réflexive : pour tout x, $x\ R\ x$;

Symétrique : pour tout x et y, si $x\ R\ y$ alors $y\ R\ x$;

Asymétrique : pour tout x et y, si $x\ R\ y$ alors il est faux que $y\ R\ x$;

Antisymétrique : pour tout x et y, si $x\ R\ y$ et $y\ R\ x$, alors $x = y$;

Sérielle : pour tout x, il y a (au moins) un y tel que $x\ R\ y$;

Transitive : pour tout x, y, z, si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$, alors $x\ R\ z$;

Euclidienne : pour tout x, y, z, si $x\ R\ y$ et $x\ R\ z$, alors $y\ R\ z$;

Totale : pour tout x et y, $x\ R\ y$ ou $y\ R\ x$;

Partiellement fonctionnelle : tout x est en relation avec *au plus un* élément de A ;

Fonctionnelle : tout x est en relation avec *un et un seul* élément de A ;

Faiblement dense : pour tout x et y, si $x\ R\ y$ alors il existe un z tel que $x\ R\ z$ et $z\ R\ y$.

Si R est réflexive, symétrique et transitive, R est une **relation d'équivalence**.

Si R est réflexive et euclidienne, alors elle est aussi symétrique et transitive, et c'est donc une relation d'équivalence.

Si R est réflexive, antisymétrique et transitive, R est un **ordre partiel**. Si en plus R est totale sur A, on dit que R est un **ordre total** (ou un **ordre linéaire**) sur A.

TAB. 1 – Rapport entre validité de formules et propriétés de R

validité de :	Propriété de R
T	Réflexive
B*	Symétrique
D	Sérielle
4	Transitive
5	Euclidienne
Q	Partiellement fonctionnelle
f	Fonctionnelle
R	Faiblement dense

* La formule $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$ est aussi valide ssi R est symétrique.

6 Exercice

Soit $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$ avec $\mathcal{W} = \{w_1\ ;\ w_2\ ;\ w_3\ ;\ w_4\}$ et :

- $w_1\ R\ w_2$, $w_2\ R\ w_3$, $w_3\ R\ w_1$, $w_3\ R\ w_4$, $w_4\ R\ w_2$;
- $V_{w_1}(p) = V_{w_3}(p) = V_{w_1}(q) = V_{w_2}(q) = 1$ (et la valeur est 0 dans les autres cas).

1. Dessinez ce modèle.
2. Calculez :
   (a) $V_{\mathcal{M},w_2}(\Box q)$
   (b) $V_{\mathcal{M},w_4}(\Box\neg(p \rightarrow q))$
   (c) $V_{\mathcal{M},w_3}(\Box(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
   (d) $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond\Box p)$
   (e) $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond p \wedge \Diamond q)$
3. Est-ce que les formules suivantes sont valides dans $\mathcal{M}$?
   (a) $\Diamond\Box p \vee \Diamond\Diamond\Box p$
   (b) $\Box p \rightarrow \neg p$
   (c) $(p \rightarrow \Diamond p) \wedge (q \rightarrow \Diamond q)$
   (d) $\Diamond(p \vee \neg p) \rightarrow (p \vee \neg q)$
4. Est-ce que les formules $\Box p \rightarrow \Diamond p$ et $\Diamond\Diamond\Box p \rightarrow p$ sont valides dans la structure de $\mathcal{M}$?

Construisez un modèle $\mathcal{M}$ (dessinez-le) à 4 mondes (i.e. avec $\mathcal{W} = \{w_1\ ;\ w_2\ ;\ w_3\ ;\ w_4\}$) tel que dans ce modèle et au monde w_1 $(\Diamond p \wedge \Diamond q)$ est vraie et $\Diamond(p \wedge q)$ est fausse.

7 Propriétés de systèmes logiques modaux

Définition 10
Une *logique* (ou une *théorie*) basée sur un langage (par exemple LM_0) est un sous-ensemble des formules de ce langage, qui contient toutes les tautologies et les formules valides dérivables (les théorèmes).

On peut toujours décider d'ajouter en tant qu'axiomes (éventuellement arbitrairement) des schémas de formules dans une logique.

Définition 11
Une logique est dite normale si elle contient le schéma de formules K et la règle d'inférence modale de nécessité N.

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(N) $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

Les schémas de formules suivants sont valides dans un logique normale :

1. $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
2. $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$
3. $(\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi)$
4. $\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$
5. $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$

Quelques logiques classiques

Nommage des logiques. Habituellement une logique normale qui contient en tant qu'axiomes les schémas de formules nommés A_1, A_2,..., A_n est nommée $\mathrm{K}A_1A_2\dots A_n$.
Par exemple, KT est le système de logique normale qui contient T.
KT4 est aussi appelé S4.
KT45 est aussi appelé S5.

Logiques modales épistémiques. Les logiques S4 et S5 (surtout S5) sont utilisées pour formaliser les modalités épistémiques. Les opérateurs modaux expriment la connaissance (d'un ou plusieurs agent(s) donné(s)).
Voici quelques interprétations informelles :

(1) a. $\Box\varphi \approx$ je sais que φ / on sait que φ / φ est sue / φ est sûre et certaine / ...
b. $\neg\Box\varphi \approx$ je ne sais pas **si**[1] φ / on ignore **si** φ / φ n'est pas sue / φ n'est pas sûre / ...
c. $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi \approx$ j'ignore si φ est fausse[2] / on ignore si φ (est fausse) / $\neg\varphi$ n'est pas sue / il se peut que $(\neg)\varphi$ / peut-être que $(\neg)\varphi$ / ...

Les schémas T, 4, 5, B et D sont valides dans S5.

(T) $\Box\varphi \to \varphi$ ce que je sais est vrai

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ si je sais quelque chose, je sais que je le sais

[1]Ne pas savoir *que* φ présuppose néanmoins que φ est vraie dans la réalité où l'on se place. Donc pour formaliser l'ignorance – qui ne se prononce pas sur la vérité de son objet – on doit utiliser la conjonction de subordination *si*.

[2]Donc forcément j'ignore aussi si φ est vraie.

(5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ si j'ignore quelque chose, je sais que je l'ignore

(B) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

(D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$

Logiques déontiques. KD a été utilisé pour formaliser les modalités déontiques.
Interprétations informelles :

(2) a. $\Box\varphi \approx$ il est obligatoire que φ / φ est obligatoire / il faut que φ / ...
b. $\Diamond\varphi \approx \varphi$ est permis / on a le droit de φ / ...
c. $\Box\neg\varphi \equiv \neg\Diamond\varphi \approx \varphi$ est interdit / ...

L'opérateur d'obligation ($\Box$ déontique) est parfois aussi noté O ; l'opérateur de permission ($\Diamond$ déontique) est parfois noté P.

(D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ ce qui est obligatoire est permis.

Logique temporelle

La temporalité peut être formalisée comme une modalité en utilisant une logique normale.
On considère une structure $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, R \rangle$ où les mondes possibles de $\mathcal{W}$ ne sont pas des variantes synchroniques les uns des autres, mais des « continuations » d'autres mondes. Cela veut dire que la relation R est une relation d'ordre chronologique.

$w_1 \, R \, w_2 = w_1$ est un état du monde *antérieur* à l'état w_2.

Pour clarifier ces notations, on écrira $<$ à la place de R :

$w_1 < w_2 = w_1$ est un état du monde *antérieur* à l'état w_2.

Une logique temporelle bien expressive a besoin en fait de deux modalités, c'est-à-dire deux structures et plus exactement deux relations d'accessibilité, selon que l'on regarde vers l'avenir ou vers le passé. La seconde relation d'accessibilité est bien sûr $>$:

$w_1 > w_2 = w_1$ est un état du monde *postérieur* à l'état w_2.

On « temporalise » les formules grâce à deux opérateurs modaux P et F. Informellement :

$\mathsf{P}\varphi \approx \varphi$ est vraie dans le passé
$\mathsf{F}\varphi \approx \varphi$ est vraie dans le futur

Ce sont des opérateurs de possibilité, comme le montre leur interprétation :

(P) $V_{\mathcal{M},w}(\mathsf{P}\varphi) = 1$ ssi il existe w' t.q. $w > w'$ et $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$

(F) $V_{\mathcal{M},w}(\mathsf{F}\varphi) = 1$ ssi il existe w' t.q. $w < w'$ et $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$

Le monde de départ w correspond au « monde présent » (c'est un présent relatif : tout monde de $\mathcal{W}$ est son propre présent).
On utilise également des opérateurs de nécessité temporelle, H et G, signifiant respectivement : toujours vrai dans le passé / dans le futur. Par définition : $\mathsf{H} = \neg\mathsf{P}\neg$ et $\mathsf{G} = \neg\mathsf{F}\neg$.

(H) $V_{\mathcal{M},w}(\mathsf{H}\varphi) = 1$ ssi pour tout w' t.q. $w > w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$

(G) $V_{\mathcal{M},w}(\mathsf{G}\varphi) = 1$ ssi pour tout w' t.q. $w < w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$

On peut montrer que les deux schémas de formules suivants sont valides dans une logique temporelle du fait que les relations $<$ et $>$ sont l'inverse l'une de l'autre (i.e. $w_1 < w_2 \equiv w_2 > w_1$).

(3) a. $\varphi \rightarrow \mathsf{HF}\varphi$
b. $\varphi \rightarrow \mathsf{GP}\varphi$

Mondes et instants

Si, dans un langage logique, on veut faire coexister la temporalité et d'autres modalités, on a intérêt à dissocier mondes et instants, en intégrant une double structure dans le modèle.

On se donne un ensemble d'instants (possiblement infini) $\mathcal{T}$ muni de la relation d'ordre $<$ (les instants ressemblent à des nombres, et on les interprète un peu comme des dates). Exemple : $\mathcal{T} = \{t_1 ; t_2 ; t_3 ; \ldots\}$.

Définition 12 (Modèle modal et temporel)
$\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, \mathcal{T}, <, V \rangle$.
La valuation V est une fonction qui à chaque lettre propositionnelle assigne une valeur de vérité pour chaque monde w et chaque instant t.

Notation 2
$V_{\mathcal{M},w,t}(\varphi) = 1$ signifie que φ est vraie dans le monde w à l'instant t, par rapport au modèle $\mathcal{M}$.

Définition 13
1. $V_{\mathcal{M},w,t}(\mathsf{P}\varphi) = 1$ ssi il existe $t' \in \mathcal{T}$ t.q. $t' < t$ et $V_{\mathcal{M},w,t'}(\varphi) = 1$
2. $V_{\mathcal{M},w,t}(\mathsf{F}\varphi) = 1$ ssi il existe $t' \in \mathcal{T}$ t.q. $t < t'$ et $V_{\mathcal{M},w,t'}(\varphi) = 1$
3. $V_{\mathcal{M},w,t}(\mathsf{H}\varphi) = 1$ ssi pour tout $t' \in \mathcal{T}$ t.q. $t' < t$, $V_{\mathcal{M},w,t'}(\varphi) = 1$
4. $V_{\mathcal{M},w,t}(\mathsf{G}\varphi) = 1$ ssi pour tout $t' \in \mathcal{T}$ t.q. $t < t'$, $V_{\mathcal{M},w,t'}(\varphi) = 1$

Multimodalité

On peut vouloir manipuler différents types de modalité dans un même langage (exemples : des modalités épistémique, déontiques, aléthiques etc.). Cela implique de distinguer différentes possibilités et différentes nécessités.

Formellement on a besoin de distinguer plusieurs opérateurs modaux.

On se donne un ensemble I de symboles (par exemple des nombres). Chaque symbole (ou indice) de I correspond à un type de modalité et les opérateurs modaux seront indicés par ces symboles.

Notation 3
Si $i \in I$:
- l'opérateur noté $\Diamond_i$ ou $\langle i \rangle$ représente la possibilité de la modalité indicée par i ;
- l'opérateur noté $\Box_i$ ou $[i]$ représente la nécessité de la modalité indicée par i.

Sémantiquement, ce qui distingue des types de modalité, ce sont les relations d'accessibilité qui leur correspondent. On aura donc une relation différente pour chaque indice i, notée R_i.

Définition 14 (Modèle multimodal)
$\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{R_i \mid i \in I\}, V \rangle$

Définition 15 (Interprétation dans un modèle multimodal)
Soit le modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{R_i \mid i \in I\}, V \rangle$, avec I non vide, et w un monde de $\mathcal{W}$.
1. $V_{\mathcal{M},w}([i]\varphi) = 1$ ssi pour tout monde $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $w \; R_i \; w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$;
2. $V_{\mathcal{M},w}(\langle i \rangle\varphi) = 1$ ssi il existe au moins un monde $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $w \; R_i \; w'$ et $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$.

A Démonstrations des équivalences entre validité des schémas de formules et propriétés de R

Le procédé est toujours le même : il s'agit de démontrer une équivalence de la forme :

La formule F est valide $\boxed{\text{ssi}}$ la relation d'accessibilité de la structure a la propriété P.

Il y a deux implications à démontrer. D'abord on suppose que R a la propriété P et on montre que dans n'importe quel monde w, F est vraie. Puis on doit montrer que si F est valide dans la structure alors R a la propriété P. Une manière simple de procéder est de démontrer la contraposée de cette implication (i.e. de raisonner par l'absurde) : on suppose que R ne respecte pas la propriété P et on montre alors que F n'est pas valide, en construisant un contre-exemple, un modèle où F est fausse.

A.1 T et R est réflexive

(T) $\quad \Box\varphi \to \varphi$

I. Supposons que R est réflexive. Donc pour tout w, $w\ R\ w$.

On montre que $V_{\mathcal{M},w}(\Box\varphi \to \varphi) = 1$ pour n'importe quel w. Pour ce faire on suppose $V_{\mathcal{M},w}(\Box\varphi) = 1$ et on montre qu'alors $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.

1. Hypothèse : $V_{\mathcal{M},w}(\Box\varphi) = 1$.
2. Donc, par définition sémantique de $\Box$, φ est vraie dans tout monde accessible à w : pour tout monde w' tq $w\ R\ w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$.
3. Or w est accessible à lui-même, par réflexivité : $w\ R\ w$. (Autrement dit, w est un de ces w' évoqués ci-dessus).
4. Donc, d'après 2, $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.

II. Maintenant supposons que R n'est pas réflexive. Cela veut dire qu'il existe w_1 tq il est faux que $w_1\ R\ w_1$.

Soit $\mathcal{M} = \langle\{w_1\ ;\ w_2\}, R, V\rangle$, avec $w_1\ R\ w_2$ et $w_2\ R\ w_2$, et $V_{w_1}(p) = 0$ et $V_{w_2}(p) = 1$.

Dans $\mathcal{M}$, *R n'est pas réflexive*, car on n'a pas $w_1\ R\ w_1$.

$V_{\mathcal{M},w_1}(\Box p) = 1$ car tout monde accessible à w_1 se réduit à w_2 et $V_{\mathcal{M},w_2}(p) = 1$.

Or $V_{\mathcal{M},w_1}(p) = 0$, donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box p \to p) = 0$.

T n'est pas valide dans $\mathcal{M}$.

A.2 B et R est symétrique

(B) $\quad \varphi \to \Box\Diamond\varphi$

I. Supposons que R est symétrique : pour tout w et w', si $w\ R\ w'$ alors $w'\ R\ w$.

Soit w un monde quelconque. Supposons que $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.

Montrons alors que $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi) = 1$.

1. Hypothèse : $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.
2. Par définition $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi) = 1$ ssi pour tout monde w' tq $w\ R\ w'$, $V_{\mathcal{M},w'}(\Diamond\varphi) = 1$, c'est-à-dire qu'il existe au moins un monde w'' tq $w'\ R\ w''$ et $V_{\mathcal{M},w''}(\varphi) = 1$.
3. Comme R est symétrique, pour tout w' accessible à w, $w'\ R\ w$.
4. Or par hypothèse 1, φ est vraie dans w.
5. Donc pour tout w' il existe un monde (w) où φ est vraie. Donc 2 est satisfaite.

6. Donc $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi) = 1$.
7. Donc $V_{\mathcal{M},w}(\varphi \to \Box\Diamond\varphi) = 1$.

II. On construit un modèle $\mathcal{M}$ où R n'est pas symétrique et où $p \to \Box\Diamond p$ est fausse dans un des mondes de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M} = \langle\{w_1 ; w_2\}, R, V\rangle$ avec $w_1 \; R \; w_2$ et $w_2 \; R \; w_2$, et $V_{w_1}(p) = 1$ et $V_{w_2}(p) = 0$.

Le seul monde accessible à w_1 est w_2, donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box\Diamond p) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w_2}(\Diamond p) = 1$.

Or le seul monde accessible à w_2 est w_2 et $V_{w_2}(p) = 0$. Donc $V_{\mathcal{M},w_2}(\Diamond p) = 0$ et donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box\Diamond p) = 0$.

Comme $V_{w_1}(p) = 1$, on en conclut que $V_{w_1}(p \to \Box\Diamond p) = 0$.

Variante avec $\Diamond\Box\varphi \to \varphi$

I. Supposons que R est symétrique et que $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\Box\varphi) = 1$.

Montrons alors que $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.

1. Hypothèse : $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\Box\varphi) = 1$.
2. Donc il existe w', tq $w \; R \; w'$ et $V_{\mathcal{M},w'}(\Box\varphi) = 1$.
3. C'est-à-dire que pour tout w'' accessible à w' (i.e. tq $w' \; R \; w''$), $V_{\mathcal{M},w''}(\varphi) = 1$.
4. Comme R est symétrique et que $w \; R \; w'$, on sait que w est accessible à w' (i.e. $w' \; R \; w$).
5. Donc d'après 3, $V_{\mathcal{M},w}(\varphi) = 1$.

II. Soit $\mathcal{M} = \langle\{w_1 ; w_2\}, R, V\rangle$ avec $w_1 \; R \; w_2$ et $w_2 \; R \; w_2$, et $V_{w_1}(p) = 0$ et $V_{w_2}(p) = 1$. (C'est la même structure que le précédent, mais avec une valuation différente).

Le seul monde accessible à w_1 est w_2, donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond\Box p) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w_2}(\Box p) = 1$.

$V_{\mathcal{M},w_2}(\Box p) = 1$ ssi p est vraie dans tout monde accessible w_2. Seul w_2 est accessible à w_2 et $V_{w_2}(p) = 1$. Donc $V_{\mathcal{M},w_2}(\Box p) = 1$ et donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond\Box p) = 1$.

Et comme $V_{w_1}(p) = 0$, $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond\Box p \to p) = 0$.

A.3 D et R est sérielle

(D) $\quad \Box\varphi \to \Diamond\varphi$

I. Supposons que R est sérielle : pour tout w, il y a (au moins) un w' tel que $w \; R \; w'$.

1. Hypothèse : $V_{\mathcal{M},w}(\Box\varphi) = 1$.
2. Donc pour tout w', si $w \; R \; w'$ alors $V_{\mathcal{M},w'}(\varphi) = 1$.
3. Comme R est sérielle, on sait qu'un tel w' existe.
4. Cela prouve alors que $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\varphi) = 1$.

II. Soit $\mathcal{M} = \langle\{w_1 ; w_2\}, R, V\rangle$ avec $w_2 \; R \; w_1$, et $V_{w_1}(p) = 0$ et $V_{w_2}(p) = 1$.

R n'est pas sérielle car aucun monde n'est accessible depuis w_1.

$V_{\mathcal{M},w_1}(\Box p) = 1$; c'est trivialement vrai car aucun monde n'est accessible à w_1.

En revanche – et pour la même raison – $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond p) = 0$.

Donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box p \to \Diamond p) = 0$.