

1 Compositionnalité, λ -calcul

1. **Syntaxe des lambda-termes** Donnez l'arbre de décomposition syntaxique de

- (1) a. $\lambda f. \lambda g. \lambda x. (f)(g)x$
b. $\lambda f. \lambda g. \lambda x. ((f)g)x$
c. $\lambda f. (\lambda g). \lambda x. ((f)g)x$
d. aab , à comparer avec $(a)(a)b$
e. $(M)ab$, à comparer avec Mab

2. **Convention de notation** Donnez les formes entièrement parenthésées des termes suivants. Si ce sont des redex, les réduire autant que possible.

- (2) a. $\lambda xz. xyz$
b. $(\lambda x. \lambda y. fxy)xy$
c. $(\lambda x. \lambda y. xyy)\lambda y. \lambda a. y$

3. **β -réduction** : Réduire autant que possible les termes suivants

- (3) a. $(\lambda x. xx)\lambda x. x$
b. $((\lambda x. \lambda y. yx)f)\lambda x. x$
c. $(\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f)((n)f)x)\lambda f x. fx$

4. **Rédex et β -réduction (niveau 2)** : Identifiez tous les redex de la forme suivante, et réduisez-la autant que possible. Si de nouveaux redex apparaissent identifiez-les.

- (4) $((\lambda S. \lambda V. (S)(V)\lambda Q. (Q)m)\lambda P. (P)j)\lambda O. \lambda y. (O)\lambda z. ((kiss)y)z$

5. **Les entiers selon Church** Vérifier que les combinateurs de Church pour les entiers fonctionnent en calculant $1+2$, 0×2 , $\text{Succ}(3)$. Compter le nombre de β -réductions nécessaires.

$$\begin{array}{ll} 0 =_{\text{def}} \lambda f. \lambda x. x & \text{Succ} =_{\text{def}} \lambda n. \lambda f. \lambda x. (f)((n)f)x \\ 1 =_{\text{def}} \lambda f. \lambda x. (f)x & + \equiv \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. ((m)f)((n)f)x \\ n =_{\text{def}} \lambda f. \lambda x. (f)(f) \dots (f)x, \text{ avec } f \text{ } n \text{ fois.} & \times \equiv \lambda m. \lambda n. \lambda f. (m)(n)f \end{array}$$

6. **Langage typé. Définitions**

L'ensemble des expressions interprétables (*meaningful expressions*) de type a , ME_a , est défini inductivement :

- Pour chaque type a , les variables et les constantes de type a sont dans ME_a .
- Pour tous types a et b , si $\alpha \in ME_{\langle a, b \rangle}$ et $\beta \in ME_a$ alors $(\alpha)\beta \in ME_b$.
- Pour tous types a et b , si u est une variable de type a et $\alpha \in ME_b$, alors $\lambda u. \alpha$ est dans $ME_{\langle a, b \rangle}$.
- Si φ et ψ sont dans ME_t , alors les expressions suivantes sont aussi dans ME_t : $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$.
- Pour tout type a , si φ est dans ME_t et u est une variable de type a , alors $\forall u \varphi$ et $\exists u \varphi$ sont dans ME_t .

Vérifier que $((\text{aimer})x)j$ est de type t .

7. Réduire autant que possible les expressions suivantes :

- (5) a. $\lambda x. ((P)x)m$
b. $\lambda x. \forall z. ((\lambda y. ((K)x)y)z \rightarrow ((R)z)x))j$

c. $[\lambda x [\lambda Y [(Y)x]](j)](P)$

En fixant une interprétation des prédicats K , R et P , et des constantes m et j , proposez pour chacune de ces formules une phrase en français ayant les mêmes conditions de vérité.

8. Soit j une constante de type e , M une constante de type $\langle e, t \rangle$, A une constante de type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$. Quel est le type des variables x , y et Y pour que les expressions suivantes soient bien formées ? Réduire autant que possible ces expressions.

- (6) a. $(\lambda x.(M)x)j$
 b. $(\lambda Y.(Y)j)M$
 c. $\lambda x \lambda Y.(Y)xjM$

9. **Combinateurs booléens** Définir avec les conventions vues en cours (opérateurs T et F) les opérateurs booléens $\wedge$ et $\vee$.

2 Ingénierie grammaticale

1. **Compositionnalité** : L'arbre de la Fig. 1 donne la décomposition de la phrase *Un chien embrasse Marie*. À chaque noeud de l'arbre est associé un lambda-terme.

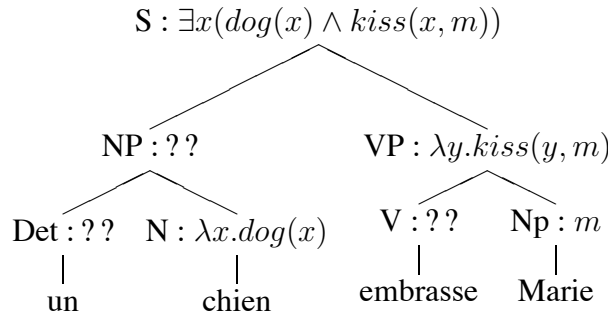


FIG. 1 – Représentation de *un chien aime Marie*

- En considérant que le lambda-terme associé à un noeud provient de l'application fonctionnelle d'un de ses fils à son autre fils (s'il en a), déduisez-en les lambda-termes manquants dans l'arbre.
 - Indiquez le type associé à chaque noeud.
 - À chaque étape, indiquez quelle branche de l'arbre est argument et quelle branche est fonction lors de l'application fonctionnelle.
2. Modifiez l'arbre de la figure ci-dessus en supposant que les noms propres sont tous de type $\langle \langle e, t \rangle t \rangle$. Quel est le type du verbe ?
3. Supposons que l'on préfère que la dénotation d'un nom propre soit de type e : par exemple, $\llbracket \text{léa} \rrbracket = l$. On peut alors imaginer de charger la règle $SN \rightarrow NP$ de garantir la « montée de type », de sorte que $\llbracket \llbracket_{SN} \text{léa} \rrbracket \rrbracket = \lambda P.(P)l$. Il faut donc trouver un λ -terme (un combinateur) Ψ tel que $\llbracket SN \rrbracket = (\Psi) \llbracket NP \rrbracket$. Comment s'écrit Ψ ?
4. Comment représenter la contribution du verbe *être* dans la phrase « Jean est mortel » ?
5. On s'accorde généralement pour considérer que la contribution d'un adjectif épithète (intersectif) est un prédicat $\langle \langle e, t \rangle \rangle$. Si on considère que les adjectifs sont adjoints au N' , comment définir les règles de composition pour que le N' le plus élevé soit bien du type $\langle e, t \rangle$?

6. Comment représenter la composition sémantique pour « Jean ne dort pas » ?
7. Vérifier que les choix faits jusqu'à présent permettent de calculer la représentation sémantique de (7-a), pour l'un de ses interprétations. Même question avec (7-b). Vérifier que le phénomène de « montée de la négation » pose un problème de compositionnalité en faisant le même calcul pour (7-c).

- (7) a. Tous les enfants voient une balle
 b. Un étudiants ne répondit pas à toutes les questions
 c. Tous les invités ne viennent pas

8. La coordination en *et* peut s'appliquer à de multiples niveaux en français. Peut-on proposer une représentation de *et* qui fonctionne dans les cas suivants ?

- (8) a. Paul est paresseux et menteur
 b. Jean et Marie dorment
 c. Jean viendra et Marie est contente
 d. Paul regarde et admire Marie

9. La formule logique compositionnellement associée à (9-a) est, avec les définitions actuelles, (9-b). Redéfinir les λ -expressions associées aux niveaux *V* et *SV* pour que le calcul compositionnel donne (systématiquement) la formule (9-c) (en d'autres termes pour que la portée du *SV* dans le *SV* soit systématiquement large par rapport à celle du *SN* sujet).

- (9) a. Tout homme aime une femme
 b. $\forall y (Hy \rightarrow \exists x (Fx \wedge Ayx))$
 c. $\exists x (Fx \wedge \forall y (Hy \rightarrow Ayx))$

Donner l'expression du foncteur permettant de shifter le verbe.

10. (a) Donner les représentations "lexicales" et le détail des combinaisons pertinentes pour la phrase *un chat ronfle*.
 (b) La représentation de *le chat ronfle*, d'après Russel, est (10). Quelle λ -expression faut-il associer à *le* pour produire ce résultat ?

$$(10) \quad \exists x (\text{chat}(x) \wedge \forall y (\text{chat}(y) \rightarrow y = x) \wedge \text{ronfle}(x))$$

- (c) Considérons maintenant la phrase (11) et son arbre syntaxique. Indiquer, pour chaque nœud du sous-arbre de racine N' , le type qu'il doit avoir pour que N' soit de type $\langle e, t \rangle$.

$$(11) \quad \text{Le chat qui dort ronfle}$$

- (d) On suppose que la représentation de cette phrase est (12). Quelle λ -expression doit-on associer à *qui* pour produire un tel résultat ?

$$(12) \quad \exists x (\text{chat}(x) \wedge \text{dort}(x) \wedge \forall y ((\text{chat}(y) \wedge \text{dort}(y)) \rightarrow y = x) \wedge \text{ronfle}(x))$$

- (e) La représentation précédente suppose que l'on a affaire à une relative *restrictive*. Comment pourrait-on prendre en compte le cas d'une relative *appositive*, comme dans : *le chat, qui dort, ronfle* (en agissant éventuellement au niveau de la grammaire) ?