

Logique propositionnelle, langue, raisonnement

1. Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

(1)	$\neg\neg\varphi$	φ	
(2)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	
(2')	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
(3)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	contraposition
(4)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	
(5)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	
(6)	$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence
(8)	$\varphi \vee \psi$	$\psi \vee \varphi$	commutativité
(10)	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	associativité
(12)	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivité
(14)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	lois de Morgan
(15)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	"

2. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
- (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
- (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
- (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen

3. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

- (1) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente
- b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
- c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente
- d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente
- e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente
- f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

- Situations : (2) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente
 b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente
 c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

4. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité. Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'autre d'un dragon. Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse. Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?*

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.

P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;

Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

5. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

- (3) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.
- b. Il est faux que Paul est venu.
- c. Jean et Marie ne viendront que si le métro fonctionne
- d. Jean viendra, à moins bien sûr que Marie ne vienne pas