Logique des prédicats : modèles, équivalences, etc.

1. **Syllogisme**
   (a) Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats
   (6) a. Tout ce que Jean n'a pas perdu, il l'a
   b. Jean n'a pas perdu un million de francs
   c. Jean a un million de francs

   (b) Analyser le syllogisme qui consiste à déduire de la conjonction de (6a) et de (6b) la conclusion (6c). Expliquer où se situe l'erreur de raisonnement.

2. **Modèles** Soit $M = \langle U, I\rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
   $I(a) = $ Alain ; $I(b) = $ Béatrice ; $I(c) = $ Christine ; $I(d) = $ David
   $I(H) = \{$Alain, David$\}$; $I(F) = \{$Christine, Béatrice$\}$
   $I(A) = \{\langle\text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle\text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{Alain}, \text{David}\rangle\}$
   $I(D) = \{\langle\text{Christine}, \text{David}\rangle, \langle\text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle\text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$

   a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :
   a. $D(d, b)$
   b. $H(d) \wedge D(c, d)$
   c. $D(d, b) \rightarrow F(a)$
   d. $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a, c))$

   b. Construisez le modèle $M' = \langle D, I'\rangle$, tel que (i) M' a le même domaine d'individus que M, (ii) I' associe la même dénotation que I aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans M' :
   a. $H(c) \wedge H(a)$
   b. $\forall x\, (H(x) \rightarrow A(x, c))$
   c. $A(a, c) \rightarrow D(c, a)$
   d. $\exists x \exists y\, ((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x, y)) \vee (H(x) \wedge F(y) \wedge A(y, x)))$

3. Proposer plusieurs phrases en français qui ont les mêmes conditions de vérité que la formule suivante, où $F(x) = x$ est fermier, $P(x, y) = x$ possède y, et $B(x, y) = x$ bat y.

$$\forall x \forall y((F(x) \wedge P(x, y)) \rightarrow B(x, y))$$

   Même question pour les formules suivantes ($P(x, y) = x$ parle à y, $j = $ Jean, $m = $ Marie, $C(x, y) = x$ croit y, $H(x) = x$ est une personne, $A(x) = x$ est un âne) :

   (7) a. $(\neg P(j, m) \rightarrow \forall x(x \neq y \rightarrow \neg P(j, x)))$
   b. $\neg\forall x((H(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow C(y, x))) \rightarrow C(m, x))$
   c. $\forall x(F(x) \rightarrow \neg\exists y(A(y) \wedge P(x, y)))$

4. Traduire en logique des prédicats, de la façon la plus directe, les trois phrases suivantes. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

   (8) a. Tous les professeurs sont méchants
   b. Aucun professeur n'est gentil
   c. Il est faux qu'il y a des professeurs gentils

5. Montrez que les formules de chacune des paires ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes, en donnant l'exemple d'une situation où l'une est vraie et pas l'autre.

   (9) a. $\forall x(A \vee B)$ *vs.* $(\forall xA \vee \forall xB)$
   b. $\exists x(A \wedge B)$ *vs.* $(\exists xA \wedge \exists xB)$

6. Les équivalences suivantes sont conditionnées par le fait que la variable x soit non libre dans une des sous-formules. Montrez comment l'équivalence est en effet perdue si on ne vérifie pas la condition.

   (10) a. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\varphi \wedge \psi)$ *si x n'est pas libre dans ψ.*
   b. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \exists x\psi)$ *si x n'est pas libre dans φ.*
   c. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$ *si x n'est pas libre dans ψ.*
   d. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ *si x n'est pas libre dans φ.*

7. **Equivalences** En partant de la formule $\exists x(Px \wedge Gx)$ (pour *il y a des profs gentils*) et de la formule $\exists x(Px \wedge \neg Gx)$, vérifiez que l'on peut déduire toutes les formules du carré d'opposition en utilisant les équivalences propositionnelles, ainsi que l'équivalence

$$\forall x \neg \varphi \equiv \neg \exists x \varphi$$

8. Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats. Donnez les deux formules les plus « naturelles », quand c'est possible.

(11) a. Jean se fâche dès que Marie est en retard
b. Jean lui en veut dès que Marie est en retard
c. Dès que tout le monde fait du bruit, Jean se fâche
d. Jean se fâche dès que quelqu'un fait du bruit
e. Tout le monde se fâche dès que Marie est en retard
f. Tout le monde se fâche si tout le monde est en retard
g. Tout le monde se fâche si quelqu'un est en retard
h. Tout le monde lui en veut si Marie fait du bruit
i. Tout le monde lui en veut si quelqu'un est en retard
j. Si un fermier possède un âne, il le bat
k. Tout le monde est marqué par un amour déçu
l. Marie ne croit pas quelqu'un à qui tout le monde fait confiance

9. Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes. Conclusion ?

(12) a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper
b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper
c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes