

1.6.2 Conséquences

Déf. 1 (Conséquence du lemme de pompage)

Soit $\mathcal{A}$ un automate à k états :

1. $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ **ssi** $\mathcal{A}$ reconnaît (au moins) un mot u t.q. $|u| < k$.
2. $L(\mathcal{A})$ est infini **ssi** $\mathcal{A}$ reconnaît (au moins) un mot u t.q. $k \leq |u| < 2k$.

Démonstrations

1. Première conséquence

- (a) Dans un sens, l'implication est triviale : si $\mathcal{A}$ reconnaît un mot, alors $L(\mathcal{A})$ est non vide. ■
- (b) Dans l'autre sens : soit $L(\mathcal{A})$ non vide, et soit u le plus petit mot de $L(\mathcal{A})$.
 Supposons que $|u| = l \geq k$. Le chemin de reconnaissance de u , $q_0, q_1, \dots, q_l$ contient au moins $k + 1$ états, qui ne peuvent pas être tous différents. Il y a donc un état q qui est visité deux fois dans la reconnaissance de u , il y a donc un circuit C dans le chemin. Alors le mot u' correspondant au même chemin de reconnaissance, mais dans lequel le circuit C est court-circuité, est un mot de longueur strictement inférieure à k . Par définition, $u' \in L(\mathcal{A})$, et il est plus court que u , ce qui est contraire à l'hypothèse. Le plus petit mot de $L(\mathcal{A})$ est donc de longueur strictement inférieure à k . ■

2. Deuxième conséquence

- (a) Dans un sens, on peut revenir directement au lemme de pompage : s'il existe un mot de longueur supérieure à k , le lemme de pompage s'applique, et il existe une infinité de mots dans $L(\mathcal{A})$. ■
- (b) Dans l'autre sens : Soit $L(\mathcal{A})$ infini, alors il existe un mot de longueur supérieure à k . Soit u le plus petit mot de longueur supérieure à k . Soit il est de longueur strictement inférieure à $2k$, et le résultat est prouvé, soit il est au moins de longueur égale à $2k$, mais par le lemme de pompage on peut court-circuiter dans ce mot un facteur de longueur inférieure ou égale à k (car si le circuit est plus long c'est qu'il contient lui-même un circuit), ce qui exhibe un mot de longueur supérieure à k et plus petit que u , ce qui est contraire à l'hypothèse que u est le plus petit. C'est donc que le plus petit mot de longueur supérieure à k est de longueur inférieure à $2k$. ■

Conséquence Pour décider si le langage reconnu par un automate est non vide, il suffit de tester tous les mots de longueur inférieure à k . On est sûr de disposer d'un algorithme décidable pour répondre à la question $L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \emptyset$.

Conséquence De même, pour décider si le langage reconnu par un automate est infini, on sait qu'il suffit de considérer tous les mots de longueur comprise entre $2k$ et k .

Remarque Déterminer si les langages engendrés par deux automates sont le même langage revient à déterminer si le langage $[L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}] \cup [L(A_2) \cap \overline{L(A_1)}]$ est vide. Par conséquent, on dispose aussi d'un algorithme décidable pour décider si deux automates reconnaissent le même langage.

Synthèse Tous les problèmes suivants sont décidables dans $\mathcal{L}_{\text{Rat}}$:

$$\begin{aligned} u \in X^* &\stackrel{?}{\in} L(A) \\ L(A) &\stackrel{?}{=} \emptyset \\ L(A) &\stackrel{?}{\text{est infini}} \\ L(A_1) &\stackrel{?}{=} L(A_2) \end{aligned}$$