SÉMANTIQUE FORMELLE ET CALCUL DES PROPOSITIONS

I) INTRODUCTION

A) Principe de compositionalité

• Production et interprétation. L'expérience du "vouloir dire".

• Principe de compositionnalité (Frege) : le sens du tout est fonction du sens des parties et de leur mode de combinaison.

Parties = mots ou morphèmes. Mode de composition = constituants syntaxiques.

B) L'approche formelle du sens

Etude des raisonnements basée sur la forme des énoncés qu'on enchaine.

(1) Si A alors B. C'est le modus ponens
A

B.

(2) Si A alors B. C'est le modus tollens
non B
----
non A.

(1') *Quand Jean est là, Marie est heureuse. Or Jean est là. Donc Marie est heureuse.*

(2') *Quand Jean vient, Marie est heureuse. Mais Marie n'est pas heureuse. Donc Jean ne vient pas.*

Logique = étude des formes valides de raisonnement.

C) La notion de proposition

"Le verbe est nécessaire pour constituer une vraie proposition, c'est-à-dire un discours déclaratif, porteur d'une assertion et susceptible d'être vrai ou faux." Aristote

Discours apophantiques (ie qualifiés de vrais ou de faux) ou non apophantiques (comme la prière, l'ordre, l'exhortation).

Une proposition est une expression complexe susceptible d'être vraie ou fausse.

Proposition atomique *vs* proposition complexe.

D) Les connecteurs

Termes **catégorématiques** *vs* termes **syncatégorématiques** (Ockham).

Termes non logiques (qui renvoient au monde) *vs* termes non-logiques (sans référence au monde, qui servent de pivot dnas les raisonnement).

II) LE CALCUL DES PROPOSITIONS

A) Syntaxe

Des lettres de propositions: p, q, r ... pour représenter les **propositions atomiques**.

Des connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et éventuellement $\leftrightarrow$.

Des parenthèses, ouvrantes et fermantes, qui servent à éviter les ambiguïtés :

(3) a. Marie sera élue, ou Pierre sera élu et une nouvelle ère commencera.
b. Marie sera élue ou Pierre sera élu, et une nouvelle ère commencera.

Définition par induction

(i) Si p est une lettre de proposition, p est une formule du langage.

(ii) Si φ est une formule du langage, alors çφ aussi.

(iii) Si φ et ϕ sont deux formules du langage, alors (φ Ò ϕ), (φ V ϕ), (φ é ϕ) et (φ - ϕ) aussi

(iv) Seules les formules générées par les clauses (i)-(iii) sont des formules du langage.

Exemples de formules bien formées : p, $p \wedge q$, $\neg p$, $p \rightarrow q$, $(p \vee q) \vee r$, $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$
Exemples de formules mal formées : -q, $\neg \rightarrow p\ q$, $p \vee p \wedge r$
Dans l' implication $(p \rightarrow q)$, on appelle p l'antécédent et q le conséquent.

B) Sémantique et table de vérité

NON	P	¬ P
	0	1
	1	0

ET	P	Q	P ∧ Q
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

OU	P	Q	P ∨ Q
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

SI	P	Q	P → Q
	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

SSI	P	Q	P ↔ Q
	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Connecteurs vérifonctionnels ou non vérifonctionnels, comme *parce que.*

III) INTÉRÊT DU CALCUL PROPOSITIONNEL

langue → formalisation propositionnelle → valeur de vérité dans un modèle

A) Ce qu'on saisit grâce à la logique des propositions

Le calcul des conditions de vérité de propositions complexes à partir des valeurs de vérité des propositions atomiques.

Une tautologie est une formule toujours vraie.

(4) a. Ou il pleut, ou il ne pleut pas. *b. Tout homme est un homme.*
c. Un célibataire n'est pas marié. *d. La guerre, c'est la guerre.*
e. être ou ne pas être, telle est la question.

Les contradictions sont les formules toujours fausses.

(5) Il est gentil, et pas gentil.

Les formules satisfaisables.

• Quelques lois logiques utiles :
les lois de Morgan : $\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
la double négation : $\neg\neg p \leftrightarrow p$ implication et disjonction : $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

B) La formalisation des raisonnements