1. **Syntaxe des lambda-termes** Donnez l'arbre de décomposition syntaxique de

   (12) a. $\lambda f.\lambda g.\lambda x.(f)(g)x$
   b. $\lambda f.\lambda g.\lambda x.((f)g)x$
   c. $\lambda f.(\lambda g).\lambda x.((f)g)x$
   d. aab, à comparer avec $(a)(a)b$
   e. $(M)ab$, à comparer avec Mab

2. **Convention de notation** Donnez les formes entièrement parenthésées des termes suivants. Si ce dont des rédex, les réduire autant que possible.

   (13) a. $\lambda xz.xyz$
   b. $(\lambda x.\lambda y.fxy)xy$
   c. $(\lambda x.\lambda y.xyy)\lambda y.\lambda a.y$

3. **β-réduction** Réduire autant que possible les termes suivants

   (14) a. $(\lambda x.xx)\lambda x.x$
   b. $((\lambda x.\lambda y.yx)f)\lambda x.x$
   c. $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f)((n)f)x)\lambda fx.fx$

4. **Les entiers selon Church** Vérifier que les combinateurs de Church pour les entiers fonctionnent en calculant $1{+}2$, $0{\times}2$, $\mathsf{Succ}(3)$. Compter le nombre de β-réductions nécessaires.

   $\mathsf{0} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.x$
   $\mathsf{1} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.(f)x$
   $\mathsf{n} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.(f)(f)\dots(f)x$, avec f n fois.

   $\mathsf{Succ} =_{\text{def}} \lambda n.\lambda f.\lambda x.(f)((n)f)x$
   $+ \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.((m)f)((n)f)x$
   $\times \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.(m)(n)f$

5. **Combinateurs booléens**

   $\mathsf{T} =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x$
   $\mathsf{F} =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.y$

   Ces définitions, conventionnelles, s'expliquent par la forme très simple que reçoit alors la définition par cas : `if` P `then` Q `else` $R =_{\text{def}} PQR$. En effet, si P se réduit en T (ie $P \equiv \mathsf{T}$), alors `if` P `then` Q `else` $R \equiv \mathsf{T}QR \equiv Q$. De même, si $P \equiv \mathsf{F}$, alors on obtient R. On peut alors définir relativement aisément les combinateurs booléens, en passant par la définition précédente : $\neg P =$ `if` P `then` F `else` $\mathsf{T} = P\mathsf{FT}$ (ou $((P)\mathsf{F})\mathsf{T}$). D'où par λ-abstraction : $\mathsf{NOT} =_{\text{def}} \lambda x.((x)\mathsf{F})\mathsf{T}$. Alors, on peut vérifier que si $P \equiv \mathsf{T}$, alors $\mathsf{NOT}P \equiv ((P)\mathsf{F})\mathsf{T} \equiv ((\mathsf{T})\mathsf{F})\mathsf{T} \equiv \mathsf{F}$.

   Définir les opérateurs $\wedge$, $\vee$, et vérifier les propriétés usuelles.

6. **Langage typé. Définitions**

   L'ensemble des expressions interprétables (*meaningful expressions*) de type a, ME_a, est défini inductivement :

   – Pour chaque type a, les variables et les constantes de type a sont dans ME_a.
   – Pour tous types a et b, si $\alpha \in ME_{\langle a,b\rangle}$ et $\beta \in ME_a$ alors $(\alpha)\beta \in ME_b$.
   – Pour tous types a et b, si u est une variable de type a et $\alpha \in ME_b$, alors $\lambda u.\alpha$ est dans $ME_{\langle a,b\rangle}$.
   – Si φ et ψ sont dans ME_t, alors les expressions suivantes sont aussi dans ME_t : $\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$.
   – Pour tout type a, si φ est dans ME_t et u est une variable de type a, alors $\forall u\varphi$ et $\exists u\varphi$ sont dans ME_t.

   Vérifier que $((\text{aimer})x)j$ est de type t.

7. Réduire autant que possible les expressions suivantes :

   (15) a. $\lambda x.\ ((P)x)m$
   b. $\lambda x.\forall z.((\lambda y.((K)x)y)z \rightarrow ((R)z)x))j$
   c. $[\lambda x\ [\lambda Y\ [(Y)x]](j)](P)$

   En fixant une interprétation des prédicats K, R et P, et des constantes m et j, proposez pour chacune de ces formules une phrase en français ayant les mêmes conditions de vérité.

8. Soit j une constante de type e, M une constante de type $\langle e,t\rangle$, A une constante de type $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$. Quel est le type des variables x, y et Y pour que les expressions suivantes soient bien formées ? Réduire autant que possible ces expressions.

   (16) a. $(\lambda x.(M)x)j$
   b. $(\lambda Y.(Y)j)M$
   c. $\lambda x\lambda Y.(Y)xjM$