

2.2.3.2 Interprétation

On se donne un modèle \mathcal{M} , c'est-à-dire un domaine D , un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation I^1 . On introduit une fonction de valuation, V , qui associe 1 ou 0 à toute formule. V dépend de \mathcal{M} .

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

- Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, \dots, c_k des constantes, alors

$$V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, \dots, c_k)) = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), \dots, I(c_k) \rangle \in I(P)$$
- Si φ et ψ sont des formules,

$$V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$$

$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ et } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$$

Avant de proposer des règles pour les formules avec un quantificateur, il faut traiter le cas des formules comprenant des **variables** (libres).

Par exemple, pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que x désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit $g : V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$. En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de \mathcal{M} (et de I) mais aussi de g :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) : $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
 $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(t_1, \dots, t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie φ . Mais que signifie ici "vérifier" la formule φ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule $\exists xE(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine D , appelons-le d , tel que, si g est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$. En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :

$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que φ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction, g' , qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre g et g' .

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation g , sauf pour $y \mapsto d$. Alors on peut écrire :

$$V_{\mathcal{M},g}(\exists y\varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$$

de même,

$$V_{\mathcal{M},g}(\forall y\varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D, V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$$

Finalement, si φ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation g . Alors on dira, pour toute **phrase** φ :

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$$

¹ I associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).