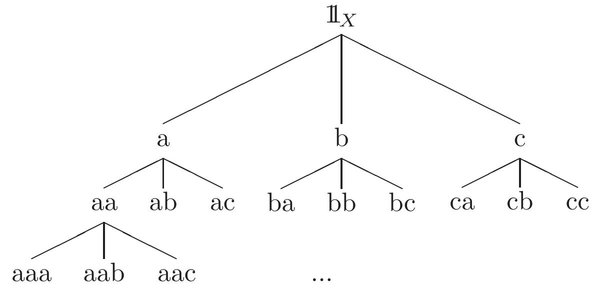
1.2.2 Représentation du monoïde X^*

Exemple : $X = \{a, b, c\}$: $X^* = \{\mathbb{1}, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, abc...\}$.



Déf. 25 (Ordre préfixiel)

Soient u et $v \in X^*$. On définit la relation d'*ordre préfixiel*, notée $<$, de la manière suivante :
$u < v \Rightarrow \exists w$ t.q. $v = uw$ (u est un préfixe de v).
N.B. : Ce n'est pas un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à une branche. Deux mots sont en relation d'ordre préfixiel ssi ils sont sur la même branche.

Déf. 26 (Ordre lexicographique)

Soient u et $v \in X^*$. On définit la relation d'*ordre lexicographique* (« alphabétique »), notée [, de la manière suivante :

$$u \,[\, v \Rightarrow \begin{cases} \quad u < v \\ \text{ou} \\ \quad \exists u_1, u_2, v_2 \in X^*, x, y \in X \\ \quad u = u_1 x u_2 \text{ et } v = u_1 y v_2 \\ \quad \text{avec } x < y \end{cases}$$

N.B. : C'est un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à un parcours en profondeur (*depth first*).

Déf. 27 (Ordre hiérarchique)

Soient u et $v \in X^*$. On définit la relation d'*ordre hiérarchique*, notée $\triangleleft$, de la manière suivante :

$$u \triangleleft v \Rightarrow \begin{cases} \quad |u| < |v| \\ \text{ou} \\ \quad \text{si } |u| = |v|, u \,[\, v \end{cases}$$

N.B. : C'est un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à un parcours en largeur (*breath first*).

Proposition : Si X est fini, alors il existe une bijection entre X^* et $\mathbb{N}$ (autrement dit, X^* est dénombrable).

Démonstration : On a exhibé un ordre total. ■