

4.2.1 Formules

En logique des propositions, on définit syntaxiquement les **formules** (ou expressions) **bien formées** — toutes les autres combinaisons de symboles étant exclues. En logique des prédicats, on distinguera deux types d'expressions dans le langage : (1) les **formules (bien formées)**, et (2) les **phrases** qui sont des formules bien formées qui expriment des propositions. Les formules bien formées qui ne sont pas des phrases correspondent intuitivement à des propriétés, ou des relations.

Vocabulaire : Constantes, noms de prédicat (arité fixe), connecteurs (cf. L_p), quantificateurs, et un stock infini de variables.

Définition 1

- (i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L , et chacun des $t_1 \dots t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L , alors $A(t_1, \dots, t_n)$ est une formule.
- (ii) Si φ est une formule dans L , alors $\neg\varphi$ l'est aussi.
- (iii) Si φ et ψ sont des formules dans L , alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L .
- (iv) Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L .
- (v) Rien d'autre n'est une formule

On peut, comme précédemment, (1) laisser tomber les parenthèses externes, (2) décomposer une formule de manière unique en un arbre, toutes les sous-formules d'une formule apparaissant dans l'arbre.

Définition 2

Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de φ , alors ψ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ . Même définition pour $\exists x$.

Exemple : $\exists y(\forall z(\exists wA(z, w) \rightarrow A(y, z)) \wedge A(x, y))$ Il faut distinguer les différentes **occurrences** d'un quantificateur : $(\exists xA(x) \wedge \exists xB(x))$.

Définition 3

- (a) Une occurrence d'une variable x dans la formule ϕ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans ϕ .
- (b) Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de ϕ et x est libre dans ψ , alors cette occurrence de x est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

Conséquence : toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul).

Noter que dans $\forall x(A(x) \wedge \exists xB(x))$ les deux occurrences de x sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes).

Noter aussi que dans $\forall xA(y)$, le quantificateur ne lie aucune variable.

Définition 4

Une **phrase** est une formule sans variable libre.

$\forall xA(y)$ n'est pas une phrase, par exemple.

Une formule avec des variables libres est appelée **fonction propositionnelle** :

$P(x) \rightarrow G(x)$ est une fonction de l'ensemble des constantes vers les propositions.

Notation : $[j/x](P(x) \rightarrow G(x))$ a les mêmes conditions de vérités que $P(j) \rightarrow G(j)$

(N.B. : on ne remplace que les occurrences libres : $[c/x](\forall xA(x, x))$ reste inchangé).