Chapitre 3

Logique des prédicats

3.1 Introduction

3.1.1 Limites de la logique des propositions

Il est assez facile de montrer que l'une des limites les plus importantes de la logique des propositions est qu'elle voit certaines propositions comme des tout inanalysés. Ainsi, la logique des propositions permet de rendre compte du syllogisme sous (51), car elle permet de voir la première proposition comme formée au moyen de plusieurs propositions ;

(51)	Si jean est malade, il ne sort pas	$P \rightarrow \neg Q$
	Jean est malade	P
	Jean ne sort pas	$\neg Q$

en revanche, le syllogisme sous (52) lui échappe : il est clair que la validité de ce syllogisme est liée à la présence d'éléments qui réapparaissent à plusieurs endroits (*Jean*, *malade*, etc.), mais les quatre propositions en présence sont toutes différentes, et le schéma utilisé précédemment ne peut plus s'appliquer.

(52)	Si un homme est malade, il ne sort pas	$P \rightarrow \neg Q$
	Jean est un homme malade	R
	Jean ne sort pas	$\neg Q'$

3.1.2 Concepts nouveaux

Pour répondre à cette limite, il faut « ouvrir » les propositions élémentaires, pour mettre en évidence la façon dont elles sont elles-même construites (nous parlons ici des propositions qui ne sont pas construites au moyen d'autres propositions).

La piste suivie trouve son origine dans la tradition logique médiévale et aristotélicienne : on fait intervenir la notion de **prédicat** (par exemple, *malade* dans (52), mais aussi *homme*...), et la notion d'**argument** qui généralise l'idée pré-moderne de **sujet**.

Bien sûr, le fait de décomposer ainsi les propositions rend nécessaire de faire une différence ignorée jusque là (et mal traitée par la tradition pré-moderne), celle que l'on trouve entre la première proposition de (52), qui a une valeur universelle (elle parle de tous les hommes), et la seconde proposition, qui a une valeur singulière (elle ne parle que de Jean). Cette différence tient à ce que l'on appellera la **quantification**.

Mais tous ces éléments nouveaux ne remettent pas en cause tout ce qui a été introduit en logique des propositions : ils viennent plutôt enrichir le langage, dans lequel seront conservés en particulier les connecteurs.

Comme nous l'avons fait pour la logique des propositions, nous allons définir le langage (ou le calcul) de la logique des prédicats en fournissant d'abord une caractérisation syntaxique (§ 3.2), puis une définition sémantique (§ 3.3). Auparavant, essayons de donner une idée intuitive de ce que l'on entendra dorénavant par prédicat, et quantificateur.

Prédicats

Phrases catégoriques Considérons tout d'abord des phrases qui ont clairement une structure sujet/prédicat (celles que la tradition philosophique appelle *catégoriques*) :

(53) a. Platon est un homme
b. Socrate est mortel
c. Le train siffle
d. Cette bouilloire fuit

Dans chaque phrase on peut identifier : une partie "propriété" (prédicat), et une partie "entité" (individu). Vont leur correspondre en logique de prédicats : des noms de prédicats (constantes de prédicat), et des constantes individuelles, une phrase étant considérée comme l'application (fonctionnelle) d'un prédicat à un individu. Par exemple, avec une "légende" : H = être un homme, p = Platon, etc :

(54) a. H(p)
b. M(s)
c. S(t)
d. F(b)

Généralisation : prédicats n-aires Les exemples suivants peuvent aussi, surtout dans la tradition aristotélicienne, se décomposer en un sujet, un prédicat :

(55) a. Jean est plus grand que Paul
b. Pierre plume le poulet
c. Alcibiade admire Socrate

Par exemple, pour (55a), le sujet correspond à *jean* et le prédicat pourrait correspondre à *est plus grand que Paul*. Mais alors le schéma d'inférence (56) ne peut pas être retrouvé (cf. (57)), car on ne représente pas le fait que les trois énoncés ont un élément en commun : la **relation** *est plus grand que*.

(56) Jean est plus grand que Paul
Paul est plus grand que Pierre
———
Jean est plus grand que Pierre

(57) P_1(j)
P_2(p)
———
P_2(j)

La partie commune de ces propositions est la **relation** “plus grand que”. On représente cette relation par un **prédicat binaire**, ce qui donne pour l'exemple précédent[1] :

(58) P(j, p)
P(p, i)
———
P(j, i)

On peut alors <u>généraliser</u> la définition précédente : une phrase atomique est formée avec un symbole de prédicat n-aire (d'**arité** n) et n constantes.

L'**ordre** des 'arguments' est évidemment important ; on parle de **place**. Par exemple, les constantes p et m peuvent être de plusieurs façon dans la relation *aime()* : cf. (59). Par conséquent, la “légende” doit être écrite avec précaution : on utilise des **variables** : père(x,y) = x est le père de y.

(59) a. Pierre aime Marie : $A(p, m)$
b. Marie aime Pierre : $A(m, p)$

Quantificateurs

Notion de quantificateur Les notions précédentes nous permettent de représenter facilement une phrase comme (60a), mais que faire pour la phrase (60b) ?

(60) a. Pierre est gentil $G(p)$
b. Tous sont gentils $G(t)$? ?

Il n'y a pas de sujet individuel au sens précédent. Un tel énoncé peut être vu comme énonçant une relation entre deux propriétés (*tous* = *tous les humains*). Mais comment exprimer cette relation ? (A) on pourrait introduire de nouvelles notations : par exemple $H \subset G$. Mais cela pose divers problèmes. (B) on peut aussi décider d'exprimer cette relation entre propriétés en parlant de tous les individus qui ont ces propriétés : tout individu qui est humain est gentil. Pour exprimer cela, on introduit : (1) une variable ; et (2) un signe pour signifier “pour toute valeur de la variable”. Cela donne : $\forall x\ G(x)$. Ce quantificateur est appelé *quantificateur universel*.

[1]Pour valider cette inférence, il faut ajouter une prémisse sur les propriétés de la relation P, en l'occurrence, la transitivité. Par exemple : $\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)))$.

Carré d'Aristote (1) L'introduction d'un quantificateur permet d'exprimer diverses propositions que nous appellerons quantifiées. Par exemple *tout est éphémère*, qui pourrait s'écrire $\forall x E(x)$, mais aussi *rien n'est éphémère*, qu'on pourrait écrire $\forall x \neg E(x)$.

La tradition frégéenne introduit un second quantificateur, qui n'est pas à proprement parler indispensable (il est définissable au moyen de l'universel), qu'on appelle *quantificateur existentiel*. On le note $\exists$, et il permet de représenter assez naturellement une phrase comme *il a des choses éphémères* : $\exists x E(x)$ "Il existe x tel que $E(x)$".

La relation entre les deux quantificateurs est assez facile à voir si on considère, par exemple, que *rien n'est éphémère* ($\forall x \neg E(x)$) peut aussi se dire *il n'existe pas de chose éphémère* ($\neg \exists x E(x)$). Cette équivalence est souvent illustrée sous la forme du fameux carré d'opposition (qui remonte à Aristote), qui permet de faire apparaître clairement les interprétations des quantificateurs (cf. figure 3.1).

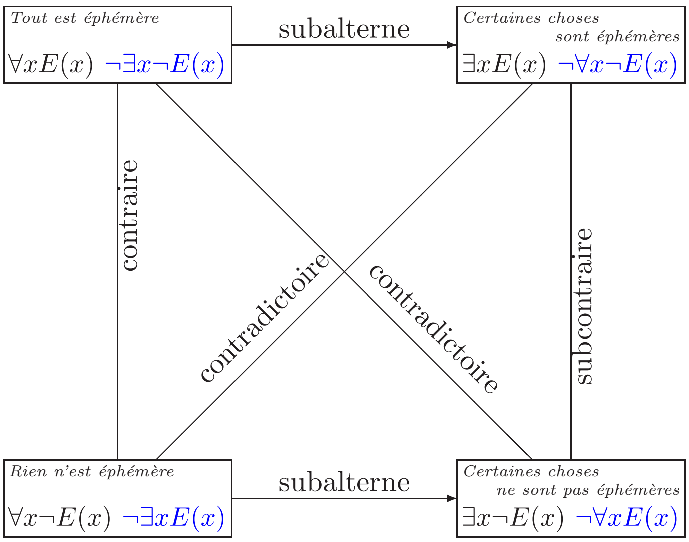

FIG. 3.1 – Carré d'Aristote, quantification non restreinte

Ce carré d'opposition, très utile pour représenter de façon synthétique l'interprétation des quantificateurs et leurs relations, permet aussi de définir en passant les notions de **contrariété** et de **contradiction**, souvent improprement confondues.

Ces notions s'appliquent à des propositions[2], dont on dira qu'elles sont *contradictoires* si d'une part elles ne peuvent pas être vraies en même temps, et d'autre part elle ne peuvent pas être fausses en même temps. Cela signifie que de deux propositions contradictoires, exactement une est vraie dans toute circonstance. La définition du connecteur négatif adoptée ici permet de formuler encore différemment la contradiction : sont contradictoires deux propositions dont l'une est équivalente à la négation de l'autre. Les propo-

[2] Mais on parle souvent, en particulier en sémantique lexicale, de **prédicats** contraires ou contradictoires, ce qui est une généralisation acceptable si on considère que des prédicats comme *marié* et *célibataire* seront dits contradictoires lorsqu'ils forment des propositions contradictoires quand on les applique au même sujet.

sitions *contraires*, quant à elles, sont telles qu'elles ne peuvent être vraies en même temps (comme précédemment), mais qu'elles peuvent être fausses en même temps. Ainsi, pour une proposition donnée, on peut trouver plusieurs propositions contraires. Dit autrement, on peut noter que le fait qu'une proposition soit fausse n'entraîne pas qu'une de ses propositions contraires soient vraies. Cette importante distinction est souvent mal traitée dans les emplois courants de ces termes.

Restriction et univers de discours Les formules quantifiées que avons considérées jusque là avaient ceci de particulier qu'elles parlaient apparemment de tous les individus de l'univers. C'est en tout cas ce que signifie une formule comme $\forall x E(x)$: tout individu (au sens d'entité) vérifie la propriété d'être éphémère (si cette formule est vraie). Mais en pratique, la plupart des énoncés quantificationnels, même celui-ci, supposent de façon sous-entendue un "univers" dans lequel la quantification s'applique. Par exemple, il n'est pas sûr que l'équation "2+2=4" soit éphémère, ou non éphémère : peut-être s'agit-il d'un individu à propos duquel la propriété d'éphémèrité n'est pas définie ; d'une façon plus parlante, on peut relever que la phrase *tout le monde dort* est bien souvent prononcée et jugée vraie alors qu'il n'est pas vrai que tous les individus de la planète dorment. Dans tous ces cas, il faut supposer l'existence d'un **domaine de quantification** implicite, et pourtant indispensable pour juger de la vérité d'une phrase quantifiée. Ce qu'il est important de noter, c'est que ce domaine de quantification n'est pas déterminé par le contenu littéral de la phrase : c'est un élément contextuel. C'est pourquoi dorénavant, nous intéressant seulement au contenu propositionnel des phrases en langue naturelle, nous laisserons de côté la détermination du domaine de quantification : lorsque nous dirons *aucun étudiant n'est venu*, nous parlons bien de la totalité des étudiants de l'univers, c'est l'univers pertinent qui peut varier selon le contexte. Ce que nous venons d'appeler domaine de quantification est aussi appelé **univers de discours**.

Il ne faut pas confondre cette notion avec les notions de **restricteur** et de **portée nucléaire** (*restrictor/scope*) qui sont couramment introduites à propos des phrases quantifiées. Dans la phrase (61), on peut dire que le prédicat *philosophe* restreint le quantificateur *chaque* aux philosophes (il ne dit rien des linguistes, par exemple).

(61) Chaque philosophe est assis

Cette restriction, qui est manipulée naturellement (et informellement) par les mathématiciens lorsqu'ils écrivent une formule comme $\forall x \in \mathbb{N}, \exists x' \in \mathbb{N}$ t.q. $x' = x+1$, s'exprime en logique des prédicats au moyen du conditionnel (matériel) pour $\forall$, et de la conjonction pour $\exists$:

(62) a. Tous les philosophes sont assis : $\forall x(P(x) \to A(x))$
b. Quelques philosophes sont assis : $\exists x(P(x) \wedge A(x))$

On voit immédiatement la nécessité d'utiliser le conditionnel dans le premier cas, la quantification logique étant par définition non restreinte, la formule $\forall x(P(x) \wedge A(x))$ ne serait vraie que dans un univers où il n'y a que des philosophes (et ils sont tous assis).

C'est un peu moins direct, mais on peut voir pourquoi on utilise la conjonction dans le second cas : la forme avec le conditionnel $\exists x(P(x) \rightarrow A(x))$ serait vraie s'il n'y a aucun philosophe, ce qui fait donc perdre à cette formule son caractère *existentiel*.

Carré d'Aristote (2) On peut proposer maintenant une nouvelle version du carré d'Aristote, avec des phrases quantificationnelles dans lesquels on distingue une restriction et une portée : voir figure 3.2.

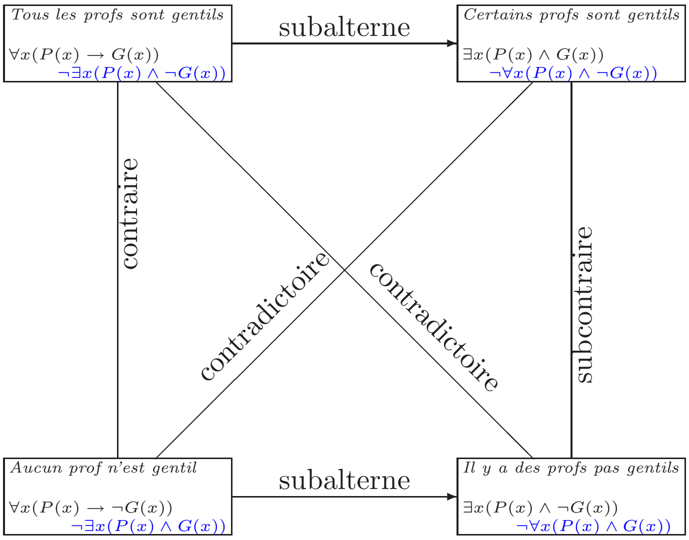

FIG. 3.2 – Carré d'Aristote, quantification restreinte

Le rapport entre les formules universelles et existentielles quand elles sont quantifiées peut maintenant être étudié.

3.2 Syntaxe

3.2.1 Formules

En logique des propositions, on définit syntaxiquement les **formules** (ou expressions) **bien formées** — toutes les autres combinaisons de symboles étant exclues. En logique des prédicats, on distinguera deux types d'expressions dans le langage : (1) les **formules (bien formées)**, et (2) les **phrases** qui sont des formules bien formées qui expriment des propositions. Les formules bien formées qui ne sont pas des phrases correspondent intuitivement à des propriétés, ou des relations.

Vocabulaire : Constantes, noms de prédicat (arité fixe), connecteurs (cf. L_p), quantificateurs, et un stock infini de variables.

Définition 1

(i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, et chacun des $t_1...t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule.

(ii) Si φ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.

(iii) Si φ et ψ sont des formules dans L, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.

(iv) Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.

(v) Rien d'autre n'est une formule

On peut, comme précédemment, (1) laisser tomber les parenthèses externes, (2) décomposer une formule de manière unique en un arbre, toutes les sous-formules d'une formule apparaissant dans l'arbre.

Définition 2

Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ. Même définition pour $\exists x$.

Exemple : $\exists y(\forall z(\exists wA(z, w) \rightarrow A(y, z)) \wedge A(x, y))$ Il faut distinguer les différentes **occurrences** d'un quantificateur : $(\exists xA(x) \wedge \exists xB(x))$.

Définition 3

(a) Une occurrence d'une variable x dans la formule ϕ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans ϕ.

(b) Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de ϕ et x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

Conséquence : toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul).

Noter que dans $\forall x(A(x) \wedge \exists xB(x))$ les deux occurrences de x sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes).

Noter aussi que dans $\forall xA(y)$, le quantificateur ne lie aucune variable.

Définition 4

Une **phrase** est une formule sans variable libre.

$\forall xA(y)$ n'est pas une phrase, par exemple.

Une formule avec des variables libres est appelée **fonction propositionnelle** : $P(x) \rightarrow G(x)$ est une fonction de l'ensemble des constantes vers les propositions.
Notation : $[j/x](P(x) \rightarrow G(x))$ a les mêmes conditions de vérités que $P(j) \rightarrow G(j)$ (N.B. : on ne remplace que les occurrences libres : $[c/x](\forall xA(x, x))$ reste inchangé).

3.3 Sémantique

Pb : cette intro ne prend du sens que si on a parlé un peu de la démonstration, soit en logique propositionnelle, soit en logique des prédicats.

3.3.1 Modèle (extensionnel) du premier ordre

Les propositions ne sont plus, comme en logique des propositions, les atomes de nos formules. Elles parlent d'**individus** et de **propriétés**. Un **modèle mathématique** d'une situation devra minimalement distinguer ces deux notions. La version la plus simple que l'on peut imaginer est le **modèle extentionel du premier ordre** : il s'agit d'un **ensemble d'individus** (d'entités), à l'intérieur duquel chaque propriété est représentée par un sous-ensemble. La figure 3.3 schématise cette notion de modèle. Alors, la "possession" d'une propriété se ramène à l'appartenance au sous-ensemble associé : dire $H(s)$ revient à dire que l'individu **dénoté** par s *appartient* à l'ensemble **dénoté** par H. On généralise facilement aux relations n-aires.

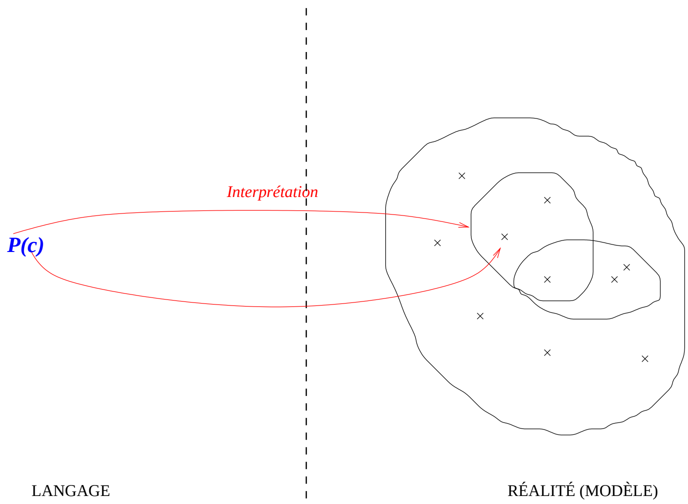

FIG. 3.3 – Illustration schématique de la notion de modèle

3.3.2 Interprétation

On se donne un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un domaine D, un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation I[3]. On introduit une fonction de valuation, V, qui associe 1 ou 0 à toute formule. V dépend de $\mathcal{M}$.

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

[3] I associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).

– Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, ..., c_k des constantes, alors
$$V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, ..., c_k)) = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k)\rangle \in I(P)$$
– Si φ et ψ sont des formules, $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$

Avant de proposer des règles pour les formules avec un quantificateur, il faut traiter le cas des formules comprenant des **variables** (libres).

Par exemple, pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que x désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit g : $V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$. En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de $\mathcal{M}$ (et de I) mais aussi de g :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) : $[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :
$$V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1,... \ t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, ...[\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g}\rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie φ. Mais que signifie ici “vérifier” la formule φ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule $\exists x E(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine D, appelons-le d, tel que, si g est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$. En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :
$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que φ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction, g', qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre g et g'.

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation g, sauf pour $y \mapsto d$. Alors on peut écrire :

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y \ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

de même,

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y \ \varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

Finalement, si φ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation g. Alors on dira, pour toute **phrase** φ :

$$\underline{V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1}$$

3.4 Quelques résultats

Comme en logique des propositions, on peut définir aussi des méthodes procédurales de preuve, par exemple une extension de la méthode des tableaux. Cependant, il y a une différence importante avec la logique des propositions : la logique des prédicats est **semi-décidable** : il existe une procédure effective telle que pour toute formule φ en entrée,

- si φ est valide alors la procédure s'arrête et retourne 'oui'
- sinon ou bien la procédure s'arrête et retourne 'non', ou bien elle ne s'arrête pas.

Pour le reste, on retrouve des résultats analogues à ceux de la logique des propositions : on peut démontrer un **théorème de déduction**, et la logique des prédicats (du premier ordre) est **complète** et **adéquate**.

3.5 Conclusion et repères bibliographiques

On a vu maintenant assez d'éléments du langage logique pour vérifier que ce langage possède plusieurs caractéristiques importantes, que l'on peut reprendre ici en guise de conclusion. La logique (moderne) est :

Véricondititionnelle On s'intéresse à une seule notion : la vérité ou fausseté d'une proposition (notions exclues : plausibilité, politicale correction, plaisir (*bravo*), adéquation à une situation sociale...).

Compositionnelle La signification (c'est-à-dire sa valeur de vérité) d'une proposition complexe dépend uniquement de la signification (i.e. la valeur de vérité) des propositions qui la composent.

Formelle Les règles d'écriture, les propriétés, et les conséquences d'une formule sont définies rigoureusement. Pas de désaccord possible une fois les règles du jeu acceptées ; nécessité d'explicitation complète des aspects pertinents en sémantique.

Calculable On peut définir des règles de calcul, et il en existe de deux ordres : **syntaxiques**, qui permettent de définir des inférences valides en fonction de la forme des prémisses ; **sémantiques**, qui permettent de calculer la vérité d'une formule à partir de la vérité des sous-formules (tables de vérité).

Ces propriétés font de la logique un outil intéressant pour étudier certains aspects de la signification des phrases de la langue naturelle : c'est précisément l'objet de la sémantique formelle. On peut même pousser plus loin cette remarque, comme l'a fait Richard Montague [1970], et défendre l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de différence de nature entre la langue naturelle et les langages logiques comme celui que nous venons de définir.

La logique moderne est présentée dans une multitude d'ouvrages en français, qui peuvent l'aborder selon différents points de vue (mathématique, philosophique, informatique, etc.). Une introduction très simple à la logique formelle et symbolique se trouve dans [Salem, 1987]. Un excellent ouvrage présente la logique philosophique dans une perspective historique : [Blanché, 1970]. Pour l'approche mathématique de la logique classique, on peut toujours se référer à [Pabion, 1976].

En anglais, il existe un certain nombre d'ouvrages qui présentent la logique avec un point de vue comparable au nôtre, orienté vers la linguistique formelle, voire computationnelle. On trouve dans [Dowty *et al.*, 1981b] un langage comparable à L_p et plusieurs variantes de langages du premier ordre ; la logique propositionnelle ainsi que la logique des prédicats sont aussi présentées dans un des meilleurs ouvrages de référence pour la sémantique formelle, [Gamut, 1991]. Les chapitres 3 et 4 de [de Swart, 1998] présentent aussi la logique dans la même perspective. On pourra se référer enfin aux chapitres correspondants de [Partee *et al.*, 1987].

Enfin, il faut citer un des premiers ouvrages d'introduction à la sémantique computationnelle, [Blackburn et Bos, 2005], dont le premier chapitre présente la logique des propositions, et discute de son lien avec la langue naturelle.