Un langage (formel) se définit au moyen (1) d'un alphabet ou vocabulaire (c'est-à-dire d'un ensemble de symboles), (2) d'une syntaxe, qui détermine la façon d'organiser les symboles pour former des expressions (bien formées), et (3) d'une sémantique, qui fixe la signification des symboles élémentaires et une méthode de calcul pour la composition des significations.

Syntaxe Soit L_p le langage de la logique des propositions. Le vocabulaire de L_p est constitué (i) d'un ensemble de *symboles de proposition* P, Q, R..., (ii) du connecteur unaire $\neg$, (iii) des connecteurs binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, et (iv) des parenthèses (et).

Les **formules bien formées** du langage L_p sont données par :

(i). Tous les symboles de propositions sont des formules de L_p.
(ii). Si φ est une formule de L_p, alors $\neg\varphi$ est une formule de L_p.
(iii). Si φ et ψ sont des formules de L_p, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L_p.
(iv). Rien d'autre n'est une formule (Seules sont des formules les expressions qui peuvent être générées par les règles 1, 2 et 3 en un nombre fini d'étapes).

Sémantique Pour calculer la valeur (de vérité) d'une formule quelconque, il faut connaître la valeur des variables propositionnelles. Soit V la fonction qui donne, pour chaque variable propositionnelle, sa valeur de vérité. On peut alors formuler le **calcul** de la valeur de vérité, que l'on notera $[\![\varphi]\!]$, d'une formule φ quelconque :

(i). Si φ est un symbole de proposition, alors $[\![\varphi]\!]_V = V(\varphi)$;
(ii). Si φ est une formule de L_p, alors $[\![\neg\varphi]\!] = 1$ si et seulement si $[\![\varphi]\!] = 0$;
(iii). Si φ et ψ sont des formules de L_p, alors
– $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = 1$ ssi $[\![\varphi]\!] = 1$ et $[\![\psi]\!] = 1$;
– $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = 0$ ssi $[\![\varphi]\!] = 0$ et $[\![\psi]\!] = 0$;
– $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!] = 0$ ssi $[\![\varphi]\!] = 1$ et $[\![\psi]\!] = 0$;
– $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1$ ssi $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$;

Autre définition de la sémantique des connecteurs

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

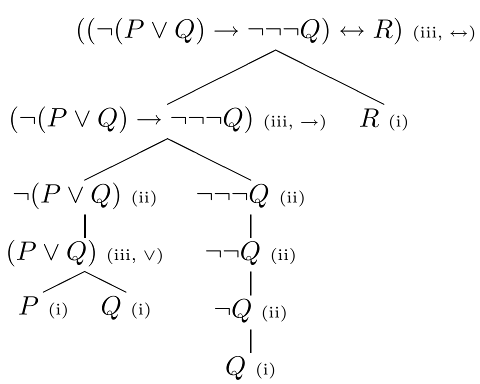
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples



$((p$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$	$\vee$	$(r$	$\rightarrow$	$p))$
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1