2.2.3.2 Interprétation

On se donne un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un domaine D, un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation I[1]. On introduit une fonction de valuation, V, qui associe 1 ou 0 à toute formule. V dépend de $\mathcal{M}$.

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

– Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, ..., c_k des constantes, alors
$$V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, ..., c_k)) = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k)\rangle \in I(P)$$
– Si φ et ψ sont des formules,
$$V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$$
$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ et } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$
$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$
$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$
$$V_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$$

Avant de proposer des règles pour les formules avec un quantificateur, il faut traiter le cas des formules comprenant des **variables** (libres).

Par exemple, pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que x désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit g : $V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$. En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de $\mathcal{M}$ (et de I) mais aussi de g :
$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) :
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :
$$V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1,\ldots\ t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, \ldots [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g}\rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie φ. Mais que signifie ici “vérifier” la formule φ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule $\exists x E(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine D, appelons-le d, tel que, si g est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$. En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :
$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que φ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction, g', qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre g et g'.

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation g, sauf pour $y \mapsto d$. Alors on peut écrire :
$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$
de même,
$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y\varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

Finalement, si φ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation g. Alors on dira, pour toute **phrase** φ :
$$\underline{V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1}$$

[1] I associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).