3.1 NP et quantificateurs généralisés

3.1.1 Remarques sur NPs et quantificateurs

Les NP (au moins ceux que l'on dit quantifiés) sont représentés en logique au moyen des deux quantificateurs courants. Mais cette méthode de représentation souffre de défauts plus ou moins graves, qu'on expose ici.

3.1.1.1 Manque de parallélisme

La première observation que l'on peut faire, dès que l'on utilise la logique des prédicats pour représenter les conditions de vérité de phrases simples, c'est que diverses constructions qui sont toutes analysées syntaxiquement comme des NP sont « traduites » de façon très disparate :

(1)	[Jean $_{\text{NP}}$] dort	dort(j)
	[Certains hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\exists x\ (Hx \wedge Dx)$
	[Tous les hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\forall x\ (Hx \rightarrow Dx)$
	[Au moins deux hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\exists x \exists y (x \neq y \wedge Hx \wedge Hy \wedge Dx \wedge Dy)$

Dans le premier cas, la contribution du NP sujet se réduit à une constante en position d'argument ; dans le second cas, le NP ne peut pas être traduit par une constante : il est nécessaire d'introduire une quantification. Il en va de même pour le 3$^{\text{e}}$ cas, mais il faut remarquer que les deux formules ne se distinguent pas seulement par le quantificateur (alors que les phrases, elles, ne se distinguent que par le déterminant du NP). Enfin, dans le 4$^{\text{e}}$ cas, deux quantificateurs (et deux variables) sont nécessaires.

Il y a donc un manque de parallélisme entre la structure syntaxique et la représentation sémantique, ou, si l'on veut le formuler autrement, un problème de compositionnalité : on s'attendrait à retrouver de façon uniforme la contribution du NP dans la représentation complète.

Ces observations ont conduit certains auteurs à déduire que la logique du premier ordre n'était pas le bon outil de représentation.

3.1.1.2 Il y a d'autres "quantificateurs" que $\forall$ et $\exists$

Deuxième observation à l'origine de l'introduction des quantificateurs généralisés, le fait qu'il y a d'autres quantificateurs (au sens linguistique) que les deux quantificateurs de la logique du premier ordre.

(2) a. Un nombre fini d'étoiles sont sensibles à l'attraction du soleil
b. Plus de la moitié des amis de Jean sont parisiens
c. La plupart des gens ont voté Chirac

On ne fait pas allusion ici simplement au fait que certains quantificateurs de la langue ne se traduisent pas directement en $\exists$ ou $\forall$ (par exemple, *exactement deux* ne correspond ni à $\exists$, ni à $\forall$, mais à une formule plus complexe impliquant $\exists$, l'égalité et une négation), mais au fait qu'il est strictement impossible de les exprimer en logique du premier ordre. On trouve une démonstration assez technique de cette affirmation dans [Barwise et Cooper, 1981].

Pour formuler cette impossibilité de façon plus précise, on peut dire qu'il n'existe pas de formule $\Phi(x)$ et de quantificateur Q tels que *La plupart des A B* aie les mêmes conditions de vérité que $Qx\ \Phi(x)$. (à comparer avec $\forall x\ (Hx \rightarrow Dx)$).

En conclusion, les deux observations précédentes suggèrent de rechercher d'autres outils que les quantificateurs de la LPO pour rendre compte du phénomène de quantification en langue naturelle. Les quantificateurs généralisés (tels que définis par Mostowski) constituent une piste possible.

3.1.2 Ensemble d'ensembles et quantificateur

3.1.2.1 Ensemble d'ensembles

Le mathématicien polonais Andrzej Mostowski a introduit en 1957 la notion de généralisation des quantificateurs, pour rendre compte de propriétés de la structure des modèles (problèmes de cardinalité).

La définition d'un **quantificateur généralisé** (QG), selon Mostowski, est facile à formuler en terme de théorie des ensembles : on appellera QG tout ensemble d'ensembles. Cette proposition est inspirée de l'observation que le quantificateur classique $\exists$ peut être vu comme dénotant l'ensemble des ensembles non vides de l'univers :

$\exists x \varphi(x)$: dit que l'ensemble des choses qui satisfont $\varphi(x)$ est non vide.

Rappel : on peut voir un (bête) prédicat, comme *dormir*, comme dénotant un ensemble, ou comme la fonction caractéristique de cet ensemble. Avec les types déjà définis, un prédicat est de type $\langle e, t\rangle$. De la même façon, on verra un quantificateur généralisé soit comme un ensemble d'ensembles, soit comme un « prédicat d'ensemble », ie quelque chose qui, étant donné un ensemble, répond vrai ou faux : $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$.

Pour revenir au quantificateur existentiel, on peut dire que $\exists x A$ est vrai si et seulement si A est non vide : $\exists x A \equiv$ non-vide(A) (avec une notation approximative).

La généralisation de Mostowski consiste à envisager que chaque ensemble d'ensembles (sur un univers donné) puisse correspondre à un quantificateur. Par exemple, si U représente l'univers de quantification :

(3) a. $[\![\exists]\!] = \{X \subseteq E / X \neq \emptyset\}$
b. $[\![\forall]\!] = \{X \subseteq E / X \subseteq E\} = \mathscr{P}(E) = ?$ E
c. $[\![\text{Fini}]\!] = \{X \subseteq E / X \text{ est fini}\}$
d. $[\![\text{Plus de la moitié des N}]\!] = \{X \subseteq E / |X \cap N| \geq \frac{1}{2}|N|\}$
e. $[\![\text{La plupart des N}]\!] = Id$

3.1.2.2 NP comme QG

L'hypothèse majeure qui a été faite par Barwise et Cooper et d'autres, dans les années 80, est la suivante :

> La dénotation des NP est (dans tous les cas) un quantificateur généralisé (au sens de Mostowski).

Cette terminologie est quelquefois source de confusion : bon nombre de NP contiennent eux-même un déterminant (certains, tout, ...) qui est aussi appelé *quantificateur*. Ici, c'est de tout le NP que l'on parle, en disant qu'il dénote un ensemble d'ensembles.

Si l'on décline cette hypothèse pour quelques NP courants, cela donne :

(4) a. $[\![\text{Tous les N}]\!] = \{X \subseteq E \; / \; [\![\text{N}]\!] \subseteq X\}$
b. $[\![\text{Quelques N}]\!] = \{X \subseteq E \; / \; [\![\text{N}]\!] \cap X \neq \emptyset\}$
c. $[\![\text{Jean}]\!] = \{X \subseteq E \; / \; j \in X\}$
d. $[\![\text{Au moins deux N}]\!] = \{X \subseteq E \; / \; |[\![\text{N}]\!] \cap X| \geq 2\}$
e. $[\![\text{La plupart des N}]\!] = \{X \subseteq E \; / \; |[\![\text{N}]\!] \cap X| \geq |[\![\text{N}]\!] \setminus X|\}$

Une telle analyse répond aux deux difficultés indiquées plus haut :

– Elle permet de formuler dans le même langage les propriétés de tous les NP (c'est du moins ce que l'on peut supposer). Cela est dû à une augmentation du pouvoir expressif du formalisme, qui permet ici de "faire du second ordre".
– En formulant de façon uniforme la contribution sémantique des NP, elle simplifie l'analyse compositionnelle des NP, dans une direction entièrement compatible avec celle que nous avons adoptée dans le chapitre sur la compositionalité.
  Ainsi, si la dénotation d'un VP est un prédicat (type $\langle e, t\rangle$), et celle du NP un QG (type $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$), alors la règle de combinaison associée à S dans $S \to NP\ VP$ est $[\![\text{VP}]\!] \in [\![\text{NP}]\!]$.

Cette vision des quantificateurs, définis comme la dénotation d'un NP, est appelée vision **fonctionnelle**.

3.1.3 Vision relationnelle

L'hypothèse précédente considère le NP comme un tout, dont la dénotation est un QG (vision dite fonctionnelle). Mais bien sûr, les NP sont eux-mêmes des expressions complexes, formées en général à partir d'un déterminant et d'un nom (pour ne mentionner ici que la forme canonique).

Comme l'on sait que l'on peut considérer la contribution d'un N (sans doute d'un N') comme un ensemble (ou un prédicat), de type $\langle e, t\rangle$, on peut aussi utiliser les notions précédentes (en particulier l'utilisation de la théorie des ensembles) pour formuler la contribution des déterminants en terme de **relation** entre les ensemble dénotés par le N′ et le VP. Ainsi, par exemple, dans (5), on peut dire que le déterminant établit une relation entre l'ensemble des enfants et l'ensemble des dormeurs : (5) est vraie ssi $[\![\text{enfants}]\!] \subseteq [\![\text{dormeur}]\!]$. Autrement dit, on peut dire, en géréral, que $[\![\text{Tous les } A\ B]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$.

(5) Tous les enfants dorment

Cette vision est dite relationnelle, car elle analyse les déterminants (ou au moins certains d'entre eux) comme des opérateurs dont la sémantique est une relation entre les deux ensembles dénotés par le N' et le VP. Par exemple, voici comment on pourrait reformuler la sémantique des quelques déterminants courants :

(6) a. $[\![\text{Tous les } A\ B]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$
b. $[\![\text{certains } A\ B]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![A]\!] \cap [\![B]\!] \neq \emptyset$
c. $[\![\text{La plupart } A\ B]\!] = 1 \Leftrightarrow |[\![A]\!] \cap [\![B]\!]| \geq |[\![A]\!] \setminus [\![B]\!]|$

d. $[\![\text{Beaucoup } A\ B]\!] = 1 \Leftrightarrow |[\![A]\!] \cap [\![B]\!]| \geq m|[\![A]\!]|$

La vision relationnelle ne s'oppose pas à la vision fonctionnelle : si l'on considère que le déterminant est une relation entre deux ensembles, c'est un objet de type $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$. Et lorsqu'on le combine avec un N$'$, de type $\langle e,t\rangle$, cela donne bien un quantificateur généralisé. Le seul cas délicat concerne le nom propre, quand il n'a pas de déterminant.

On peut noter en passant que cette vision relationnelle, qui donne un rôle important au déterminant, converge avec une proposition faite en syntaxe générative, sous le nom d'hypothèse DP, qui consiste à faire des déterminants la tête des syntagmes nominaux [Abney, 1987] (et qui est fondée sur des considérations largement morpho-syntaxiques).

Une dernière remarque : la vision relationnelle revient à donner un rôle important au déterminant, pour ce qui est de la quantification : elle conduit à appeler "quantificateur" les déterminants, qui opèrent sur deux ensembles. Pour rester cohérent, on a alors deux notions : le quantificateur, de type $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$ et le quantificateur généralisé, de type $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$. On voit les difficultés terminologiques qui peuvent surgir, sur lesquelles nous devons attirer l'attention du lecteur.

Cette hypothèse sur la correspondance entre NP et QG a donné naissance à une littérature extrêmement fructueuse pour l'analyse des déterminants de la langue (naturelle) et sur le fonctionnement des NP (DP). La possibilité de formuler des propriétés mathématiques bien définies sur les dénotations des déterminants a permis en particulier (1) de mettre en évidence des propriétés communes à tous les déterminants linguistiques, et (2) de faire apparaître des propriétés discriminantes, qui permettent de classer les déterminants dans des catégories nouvelles, et d'expliquer certains phénomènes comme la polarité nagtive.