# Logique du premier ordre

(Une introduction pour les linguistes)

Pascal Amsili (Université de Paris 7)
amsili@linguist.jussieu.fr

Atelier logique et sémantique du langage naturel
Semaine bordelaise de sémantique formelle
27-29 mars 2006

# Table des matières

# Chapitre 1

# Logique des propositions

## 1.1 Introduction

Comme il est d'usage en la matière, on commence par une version simple de la logique moderne, que l'on appelle logique des propositions, et qui constitue le socle sur lequel se construit ce qu'on appelle aujourd'hui la logique classique (ou logique des prédicats) qui sera présentée au chapitre 2.

### 1.1.1 Logique, raisonnement

La logique peut être définie comme l'étude des raisonnements valides. Plus précisément, les logiciens se sont intéressés, depuis longtemps, aux propriétés **formelles** des raisonnements valides.

La démarche consiste à considérer des raisonnements valides, comme ceux de (1), et à tenter de mettre en évidence les propriétés sous-jascentes de ces raisonnements, en faisant abstraction des éléments non pertinents. Par exemple, dans le premier cas, le choix du mot *vertu* n'est pas déterminant : si on remplace *vertu* par *sagesse* dans toutes ses occurrences, on conserve la validité du raisonnement.

Nous voulons souligner ici l'analogie entre la démarche du logicien et celle du linguiste : les raisonnements valides constituent les données de départ du logicien, et ce que l'on cherche à faire, c'est élaborer un système qui reproduit ces jugements de validité, produits de la « compétence rationnelle » des sujets[1].

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | a. | Prémisses | Toute vertu est accompagnée de discrétion |
| | | | Il y a des zèles sans discrétion |
| | | Conclusion | Il y a des zèles qui ne sont pas vertu |
| | | | *Mode BAROCO ($2^{de}$ figure) de [Arnauld et Nicole, 1662]* |
| | b. | | S'il pleut, la route est mouillée |
| | | | La route n'est pas mouillée |
| | | | Il ne pleut pas |

[1]Cette analogie rapide néglige des débats importants et délicats sur la question.

c. Tous les hommes sont mortels
Socrates est un homme
———————————
Socrates est mortel

La logique des propositions ne va s'intéresser qu'à certains raisonnements parmi les types de raisonnement que nous avons illustrés ici. Dans (1a), pour trouver les arguments formels qui rendent le syllogisme concluant, il faut regarder « à l'intérieur » des propositions en jeu, observer que les mêmes termes réapparaissent sous des quantifications variées, etc. La logique propositionnelle ne va rien avoir à dire là-dessus. Dans (1b), on peut observer que les éléments essentiels qui rendent le syllogisme valide sont les connecteurs *si* et la négation. On a quelque chose comme « Si P Q ; non Q ; donc non P ». C'est là-dessus que la logique propositionnelle va travailler. Enfin, dans (1c), montré ici par anticipation, il faut regarder à l'intérieur, mais d'une façon plus détaillée que dans la syllogistique (qui ne sait rien dire de la seconde proposition, singulière). Ce sera le rôle de la logique des prédicats. La logique des propositions se concentre donc sur deux classes d'objets, les **propositions**, et les **connecteurs**.

### 1.1.2 Les objets de base

#### 1.1.2.1 Propositions

Elles reçoivent une définition *externe*[2] : est appelée proposition toute expression qui peut être dite vraie ou fausse, ce qui exclut, entre autres, les questions (2a), les impératifs (2b), les exclamatifs (2c), et plus généralement tous les énoncés dits *non assertifs*, comme certains performatifs (2d), certains énoncés à fonction phatique (2e), ou — on peut en discuter — toute la classe des énoncés modalisés (2f).

(2) a. Est-ce que Paul aime la marche à pied ?
b. Fermez la porte !
c. Qu'elle est gentille !
d. Je te promets de venir
e. Tu m'entends !
f. La bataille aura lieu demain

Il faut noter qu'en logique propositionnelle, les propositions vont rester **inanalysées**, **atomiques** — sauf quand elles peuvent se décomposer en d'autres propositions et des connecteurs.

Étant donnés les objectifs linguistiques que nous avons ici, on peut s'interroger sur le rapport entre phrase (au sens linguistique) et proposition (au sens logique). Il est clair que ce rapport n'est pas direct : (a) deux phrases peuvent exprimer la même proposition (par exemple dans deux langues différentes, ou encore lorsque l'on utilise des variantes lexicales (*dame*/*femme*), mais aussi parce que la proposition correspond au contenu littéral, qui peut être le même pour deux phrases dont le contenu exprimé est différent). (b) Une phrase peut contenir plusieurs propositions (soit par la présence d'un connecteur (3a),

[2] Par contraste avec la définition héritée de la tradition philosophique, que nous qualifierons d'*interne*, qui définit une proposition comme un prédicat appliqué à un sujet.

soit par des effets sémantiques (présupposition en (3b)) ou pragmatiques (3d), soit par ambiguïté (3e)).

(3) a. Si Pierre chante, tout le monde se plaint
 b. Le Roi de France est chauve
 c. Avant son mariage, il était moins bien nourri
 d. Même Jean est venu
 e. Toutes les françaises admirent un acteur

#### 1.1.2.2 Connecteurs

Les connecteurs sont des opérateurs qui permettent, en reliant deux propositions, de former une nouvelle proposition : avec cette définition, le prototype du connecteur est le mot *et*, qui (au moins dans certains cas) fonctionne en effet de cette manière-là : la phrase (4c) est une proposition formée au moyen du connecteur *et* et de deux (autres) propositions.

(4) a. Il pleut à Paris
 b. Il neige à Ouagadougou
 c. Il pleut à Paris et il neige à Ouagadougou

Il est important de noter que si le mot *et* fonctionne dans certains cas comme un connecteur, ce n'est pas nécessairement le cas dans tous ses emplois, qui pourtant seraient qualifiés de connecteur au point de vue linguistique. Ici, c'est une définition logique que nous adoptons, et l'emploi de mots français n'est qu'une commodité.

Les connecteurs qui nous intéressent ici sont caractérisés par leur sensibilité exclusive à la vérité ou la fausseté de leurs opérandes, c'est ce que l'on appelle le caractère **véri-fonctionnel** des connecteurs. Il y a en langue des expressions qui semblent jouer un rôle de connecteur (par exemple les conjonctions de subordination), mais qui ne sont pas véri-fonctionnelles.

(5) a. Jean s'est cogné et il pleure
 b. Jean pleure parce qu'il s'est cogné
 c. Jean pleure
 d. Jean s'est cogné

Supposons que (a) soit vraie. Prenons à la place de 'Jean pleure' une autre proposition vraie, par exemple 'il pleut', alors "Jean s'est cogné et il pleut" est vraie aussi. De même, si on suppose (c) fausse, la valeur de vérité de (5a) n'est pas modifiée par la substitution de 'Jean pleure' par une autre proposition fausse. Autrement dit, par rapport à l'interprétation de *et*, ce qui compte est simplement la valeur de vérité des arguments.

Si on fait la même substitution dans (b), on obtient une phrase fausse. Pourquoi ? Parce que le connecteur *parce que* ne dépend pas seulement des valeurs de vérité de ses opérandes.

En nous restreignant aux connecteurs véri-fonctionnels, on bénéficie d'une conséquence directe de la compositionalité : pour calculer la vérité d'une proposition, il suffit de regarder la vérité des propositions qui la composent.

## 1.2 Syntaxe

Un langage se définit au moyen (1) d'un alphabet (c'est-à-dire d'un ensemble de symboles), (2) d'une syntaxe, qui détermine la façon d'organiser les symboles pour former des expressions (bien formées), et (3) d'une sémantique, qui fixe la signification des symboles élémentaires et une méthode de calcul pour la composition des significations.

### 1.2.1 Formules bien formées

Soit $L_p$ le langage de la logique des propositions. Le vocabulaire de $L_p$ est constitué (i) d'un ensemble de *symboles de proposition* $P$, $Q$, $R$..., (ii) du connecteur unaire $\neg$, (iii) des connecteurs binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, et (iv) des parenthèses ( et ).

Les **formules bien formées** du langage $L_p$ sont données par :

(i). Tous les symboles de propositions sont des formules de $L_p$.
(ii). Si $\varphi$ est une formule de $L_p$, alors $\neg\varphi$ est une formule de $L_p$.
(iii). Si $\varphi$ et $\psi$ sont des formules de $L_p$, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de $L_p$.
(iv). Rien d'autre n'est une formule (Seules sont des formules les expressions qui peuvent être générées par les règles 1, 2 et 3 en un nombre fini d'étapes).

La signification précise des connecteurs est donnée plus loin, mais on peut déjà indiquer leur nom : $\wedge$ est appelé **et** (logique) ou conjonction ; $\vee$ est appelé **ou** (logique), ou disjonction, ou **ou inclusif** ; $\rightarrow$ est appelé **implication** ou conditionnel (matériel) ; et $\leftrightarrow$ est appelé **équivalence** (matérielle).

### 1.2.2 Arbres de construction

La définition récursive précédente permet de donner, pour tout formule bien formée, un **arbre de construction** (ou de décomposition). Par exemple, la formule (bien formée) (6) peut-être décomposée de la manière représentée à la figure 1.1.

(6) $((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg\neg Q) \leftrightarrow R)$

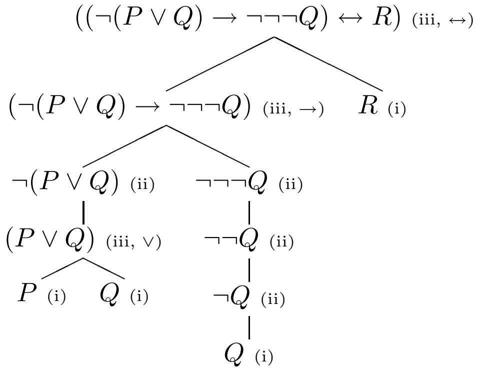


FIG. 1.1 – Exemple d'arbre de construction

L'arbre de construction peut être vu comme la trace de la vérification qu'une suite de symbole est une formule bien formée. Ainsi, la formule (6) est bien formée si et seulement si elle a été construite avec le connecteur $\leftrightarrow$, et les deux formules bien formées $((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg\neg Q) \leftrightarrow R)$ d'une part et $R$ d'autre part. Le connecteur $\leftrightarrow$ est appelé **signe principal** de la formule (6). La formulation des règles de syntaxe garantit que toute formule a un et un seul signe principal. On voit que pour garantir que la formule initiale est bien formée, il faut maintenant vérifier que les deux premiers fils dans l'arbre correspondent à des formules bien formées. Il faut donc réitérer le processus, jusqu'à aboutir à des formules comme $R$, qui, dès lors que $R$ est un symbole de proposition, sont bien formées en vertu de la règle (i).

Il est important de noter que toute formule bien formée a un et un seul arbre de construction (c'est une conséquence du fait que le langage de la logique est syntaxiquement non ambigu) ; et que de surcroît apparaissent dans cet arbre exactement toutes ses **sous-formules** (une sous-formule d'une formule $\varphi$ est une suite (contiguë) de symboles de $\varphi$ qui est elle-même une formule bien formée).

## 1.3 Sémantique

Donner une sémantique à un langage formel consiste à définir une fonction (au sens mathématique) qui est capable d'associer à toute formule bien formée un « sens » : en l'occurrence, le sens d'une formule sera simplement une valeur de vérité (vrai ou faux).

Pour définir cette fonction, on procède en deux étapes : d'abord, on donne un sens (une sémantique) aux éléments atomiques du langage, c'est-à-dire d'une part les variables propositionnelles et d'autre part les connecteurs (qu'on appelle quelquefois constantes logiques) (§ 1.3.1) ; ensuite, on donne une méthode de calcul pour calculer le sens de toute formule complexe à partir du sens des constituants plus simples (§ 1.3.2).

Avant de définir tous ces aspects en détail, il faut faire encore une remarque générale : les règles que nous donnerons ci-après ne permettent évidemment pas de décider, en général, si une proposition quelconque (par exemple (7a)) est vraie ou fausse. En revanche, ces règles permettront de décider si (7c) est vraie, dès lors que l'on sait si (7a) et (7b) le sont.

(7) a. Il pleut à Paris
b. Il neige à Ouagadougou
c. Il pleut à Paris et il neige à Ouagadougou

Autrement dit, pour décider si une formule est vraie (par exemple $P \wedge Q$), il est nécessaire de fixer les valeurs des propositions élémentaires qui interviennent dans la formule (ici, $P$ et $Q$). Ainsi, si nous plaçons dans la situation où (7a) est vraie, et (7b) fausse, alors nous pouvons faire le calcul de la valeur de vérité de (7c).

### 1.3.1 Éléments atomiques

#### 1.3.1.1 Symboles de proposition

Les symboles de proposition ont deux valeurs possibles, vrai ou faux, que nous noterons conventionnellement 1 et 0.

#### 1.3.1.2 Connecteurs : tables de vérité

Au point de vue sémantique, les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions : étant données deux propositions, c'est-à-dire deux valeurs de vérité, ils donnent une valeur de vérité. Comme il n'y a que 2 valeurs de vérité possible, il est facile de résumer le comportement d'un connecteur sous la forme d'une table de vérité. Voici les tables de vérité des connecteurs définis dans $L_p$.

(8)

| $\varphi$ | $\neg\varphi$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \wedge \psi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \vee \psi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \rightarrow \psi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Ces définitions appellent quelques remarques, simplement évoquées ici. D'une part, la question de la correspondance entre les connecteurs logiques et leurs correspondants directs en langue est, c'est bien connu, délicate. Ensuite, on peut noter que la liste ci-dessus n'est pas exhaustive : il y a en fait 16 ($= 2^4$) connecteurs binaires définissables. Mais on sait aussi que ces connecteurs sont « interdéfinissables » par exemple il suffit d'avoir la négation et la conjonction pour pouvoir exprimer tous les autres connecteurs.

### 1.3.2 Calcul

#### 1.3.2.1 Tables composites

La méthode de calcul de la valeur de vérité d'une formule repose sur la décomposition de cette formule : on crée un tableau avec une colonne par sous-formule de la formule initiale. Il y a donc en particulier dans ce tableau des colonnes pour chacun des symboles de proposition qui apparaît dans la formule. Chaque ligne de ce tableau va correspondre à une situation possible, où par situation on entend une combinaison particulière de valeurs de vérité pour les propositions élémentaires. Voici sous (9) un exemple simple, avec 6 sous-formules (y compris la formule elle-même). Il y a deux symboles de propositions ($p$ et $q$), et le tableau envisage toutes les combinaisons possibles ($2^2 = 4$).

(9) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Pour passer d'une colonne à l'autre (remarquer que l'ordre des colonnes correspond à un parcours de bas en haut de l'arbre de décomposition), il faut se reporter à la table de vérité du connecteur (ou signe) principal. Par exemple, pour calculer la colonne $\neg p \wedge \neg q$, il faut voir la formule comme $\varphi \wedge \psi$, avec $\varphi = \neg p$ et $\psi = \neg q$ (colonnes précédentes). Il suffit alors de se reporter à la table de vérité de $\wedge$ pour pouvoir faire le calcul.

Il existe une autre notation (équivalente) pour représenter le calcul que nous venons de décrire : elle consiste à représenter un tableau dont les colonnes correspondent aux symboles de la formule elle-même (parenthèses exclues) : sous chaque connecteur on représente la valeur de vérité de la sous-formule dont il est le signe principal. Voici un exemple, avec une formule comportant 3 symboles de proposition, il y a donc $2^3$ lignes dans le tableau (noter, entre autres, la répétition des valeurs de $p$ sous les deux occurrences de ce symbole).

(10)

| ( | ( | $p$ | $\wedge$ | ( | $q$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) | $\vee$ | ( | $r$ | $\rightarrow$ | $p$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | | | 1 | | 0 | 1 | 0 | | |
| | | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | | | 1 | | 0 | 1 | 0 | | |
| | | 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | 1 | 1 | | 0 | 1 | 0 | | | 1 | | 0 | 1 | 1 | | |
| | | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |
| | | 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 | | | 1 | | 0 | 1 | 1 | | |
| | | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |

Noter que dans un tel calcul, on envisage la totalité des configurations possibles, on est donc à la fois capable de décider si une formule est vraie dans une situation donnée, et aussi capable de décrire l'ensemble des situations qui rendent vraie (« satisfont ») la formule. Intuitivement, c'est plutôt le premier point de vue qui nous intéresse : par exemple, si on s'intéresse à la valeur de vérité de la proposition (11a), dans la situation (11b), on peut utiliser la formule (11c), dont la légende est (11d), pour faire le calcul. La table de vérité composite comprend la ligne donnée sous (12), qui permet de conclure que la phrase (11a) est vraie dans la situation considérée. Mais bien entendu, pour produire cette ligne particulière, il faut être capable de produire l'intégralité du tableau.

(11) a. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
b. Situation : Pierre ne vient pas, Marie vient, Jean vient.
c. $\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$
d. P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

(12)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $(Q \vee R) \rightarrow P$ | $\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

#### 1.3.2.2 Équivalence logique

La détermination de la valeur de vérité de la formule dans tous les cas de figure permet de s'intéresser à des propriétés générales de certaines formules, et de les comparer entre elles. Par exemple, le tableau donné sous (9), reproduit ici, comprend une dernière colonne qui ressemble point pour point à celle de $p \vee q$.

(13)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Le fait que les deux colonnes soient identiques signifie que les deux formules ($\neg(\neg p \wedge \neg q)$ et $p \vee q$), **dans toutes les situations**, ont la même valeur de vérité. On dira que ces formules sont **(logiquement) équivalentes**. Cette notion d'équivalence joue un rôle dans la notion de démonstration (cf. plus loin)[3].

#### 1.3.2.3 Tautologies, contradictions

Indépendamment du problème de la comparaison de deux formules, on peut aussi rencontrer des formules qui présentent des propriétés remarquables. Ainsi, dans la table de vérité suivante, on trouve une formule qui est vraie dans toutes les situations. De telles formules, qui vont elles aussi être utilisées pour les démonstrations, sont appelée des **tautologies**. De même, il existe des formules fausses dans toute situation, qu'on appellera **contradictions**. On doit remarquer que la valeur de vérité de telles formules est par conséquent indépendante des valeurs de vérité des symboles de proposition qui y apparaissent.

(14)

| $p$ | $q$ | $(p \to q)$ | $\neg q$ | $(p \wedge \neg q)$ | $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$ | $(q \vee \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

La plupart des formules, dont la valeur de vérité dépend de la situation (c'est-à-dire des valeurs de vérité des formules atomiques), et ne sont par conséquent ni des tautologies ni des contradictions, seront dites **contingentes**. On utilise la (méta-)notation $\models \varphi$ pour indiquer que $\varphi$ est une tautologie.

#### 1.3.2.4 Équivalence matérielle

Il est facile de vérifier (et même de démontrer) que si $\varphi$ et $\psi$ sont logiquement équivalentes, alors la formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est toujours vraie (c'est-à-dire est une tautologie).

(15)

| $p$ | $\neg p$ | $\neg\neg p$ | $p \leftrightarrow \neg\neg p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ | $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

En fait, c'est un théorème de la logique des propositions :

(16) *$\varphi$ et $\psi$ sont logiquement équivalentes ssi $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.*

[3] On peut faire des choses plus subtiles en comparant les colonnes de deux formules dans une table composite : par exemple, si entre deux colonnes on trouve le même rapport de valeurs que dans le tableau de l'implication matérielle ($\to$), on pourra dire que la première implique logiquement la seconde.

Ce théorème permet donc de faire un lien entre deux notions que nous avons introduites dans ce chapitre, celle d'équivalence matérielle et celle d'équivalence logique. Mais il est important de bien faire la différence entre ces deux notions. La notion d'équivalence logique concerne deux formules qui, **dans toutes les situations** se comportent de la même façon. Il s'agit d'une relation entre formules, que l'on pourra noter au moyen du symbole $\equiv$ : par exemple, $p \equiv \neg\neg p$. Mais cette notation ne fait pas partie du langage que nous avons défini plus haut, $L_p$. Cette notation relève du métalangage. L'équivalence matérielle, quant à elle, est un opérateur, comme l'opérateur + en arithmétique : étant donnés deux opérandes, il fournit un résultat : $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ne dit rien des formules $\varphi$ et $\psi$ en général, mais vaut vrai ou faux selon la valeur de ses opérandes dans une situation donnée.

Cette distinction apparaît dans la formulation du théorème que nous avons choisie : c'est seulement lorsque $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est toujours vraie que l'on peut conclure que $\varphi \equiv \psi$.

#### 1.3.2.5 Valuation

On peut formaliser complètement (« algorithmiquement ») le calcul de la valeur d'une formule, **une fois connues les valeurs des propositions qui la composent**. En fait, on se donne une sorte de *modèle*, sous la forme d'une fonction mathématique de l'ensemble des symboles de proposition dans l'ensemble $\{0, 1\}$. On appelle une telle fonction, notée $V$, une *valuation*. Alors, l'interprétation d'une formule quelconque $\varphi$ (notée $[\![\varphi]\!]_V$ pour rappeler qu'elle dépend de $V$) peut être donnée par les règles suivantes :

1. Si $\varphi$ est un symbole de proposition, alors $[\![\varphi]\!]_V = V(\varphi)$ ;

Pour toutes formules $\varphi$ et $\psi$ :

2. $[\![\neg\varphi]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 0$ ;
3. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 1$ et $[\![\psi]\!]_V = 1$ ;
4. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_V = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 0$ et $[\![\psi]\!]_V = 0$ ;
5. $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_V = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 1$ et $[\![\psi]\!]_V = 0$ ;
6. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = [\![\psi]\!]_V$ ;

Ces règles sont "calquées" sur la syntaxe, et nous donnent des règles d'interprétation qui en fait décomposent (récursivement) la formule jusqu'à trouver des sous-formules élémentaires dont la valeur de vérité ne dépend plus que du modèle (c'est-à-dire de $V$).

On peut facilement prouver que l'algorithme précédent, étant donnée une formule propositionnelle quelconque, permet de déterminer quand la formule est vraie ou fausse, au bout d'un nombre fini d'étapes (il suffit de remarquer que la table de vérité d'une formule comportant $n$ atomes comprend au plus $2^n$ lignes). La logique des propositions est **décidable**.

#### 1.3.2.6 Conséquence logique

Mais la logique, comme modèle du raisonnement, a pour objectif de permettre de démontrer des syllogismes. Alors, il ne s'agit pas seulement de décider si une formule est vraie ou fausse dans une situation, mais plutôt si la vérité d'une proposition (la conclusion) découle nécessairement de la vérité d'autres propositions (les prémisses). On introduit la notion de **conséquence logique** : une formule $F$ est une conséquence logique d'un ensemble de formules $\Gamma$ si toute valuation qui donne vrai à toutes les formules de $\Gamma$ donne vrai à $F$. On note cela $\Gamma \models F$. Un exemple, avec $\Gamma = \{(p \wedge q), (q \rightarrow \neg r)\}, F = \neg r$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| On a : | $(p \wedge q)$ | $\models$ | $q$ |
| De plus : | $q, (q \rightarrow \neg r)$ | $\models$ | $\neg r$ |
| Donc : | $(p \wedge q), (q \rightarrow \neg r)$ | $\models$ | $\neg r$ |

#### 1.3.2.7 Démonstration

Avec les méthodes données jusqu'à présent, on dispose d'un moyen de « prouver » qu'une formule est vraie dans une situation donnée : il suffit de calculer sa valeur de vérité. On peut parler de démonstration sémantique. Mais la notion d'équivalence logique va nous permettre d'envisager une autre façon de prouver qu'une formule est vraie, en nous livrant à des manipulations d'ordre formel sur les formules, à condition de respecter quelques principes énoncés ci-après. Dans ce cas, on parle de démonstration syntaxique, ou de preuve.

**Règle de substitution** *Le résultat de substituer la même formule (atomique ou non) à toutes les occurrences de la même lettre dans une tautologie, est une tautologie.*

Par exemple, si l'on sait que la formule (17a) est une tautologie (c'est le cas), alors la substitution de toutes les occurrences de $p$ par une autre formule quelconque, par exemple $(p \rightarrow q)$ (cela donne (17b)), est encore une tautologie.

(17) a. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
b. $((p \rightarrow q) \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge (p \rightarrow q))$

Ce principe nous permet donc de « découvrir » de nouvelles équivalences, sans passer par le calcul des valeurs de vérités. Mais ce principe n'est pas suffisant pour faire toutes les démonstrations que l'on voudrait faire, car il ne nous permet pas de manipuler des formules contingentes. Le principe suivant palliera ce manque.

**Règle de remplacement** *Soit $\alpha$ une sous-formule de $\varphi$. Si $\alpha \equiv \beta$, alors (1) le remplacement de $\alpha$ par $\beta$ dans $\varphi$ donne une formule $\varphi'$ équivalente à $\varphi$, et (2) si $\varphi$ est une tautologie, alors $\varphi'$ l'est aussi.*

Ce principe nous dit que l'on ne change pas la valeur de vérité d'une formule en remplaçant une sous-formule par une (sous-)formule équivalente. Par exemple, si l'on sait que (18a), alors on peut conclure que (18b) et (18c) sont équivalentes. Et si on sait que (18d) est une tautologie, alors on peut conclure que (18e) en est une aussi.

(18) a. $(p \rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$
b. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
c. $(\neg(p \wedge \neg q) \wedge p) \rightarrow q$
d. $((p \rightarrow q) \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge (p \rightarrow q))$
e. $(\neg(p \wedge \neg q) \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge (p \rightarrow q))$

Ce principe permet de produire une démonstration au sens courant en mathématiques : partant d'une formule qu'on sait vraie (on peut la savoir vraie par calcul, ou la supposer vraie et considérer ses conséquences), on peut produire par remplacement de nouvelles formules en préservant l'équivalence, ce seront donc de nouvelles formules vraies (on parle de **théorème**).

Notons cependant que ces principes ne fournissent pas d'**algorithme** pour décider "syntaxiquement" si une formule est vraie. Il existe pour cela de nombreuses méthodes dites syntaxiques (ou procédurales), par exemple, les systèmes axiomatiques (Frege), la déduction naturelle et le calcul des séquents (Gentzen), etc. La plus connue de ces méthodes est la méthode des tableaux (ou des arbres). Ces méthodes (qui sont aussi à la base des systèmes modernes de déduction automatique) définissent une notion de prouvabilité : on notera $\vdash F$ le fait que $F$ est démontrable par la méthode des tableaux (p. exemple), et $\Gamma \vdash F$ le fait que l'on peut démontrer par la même méthode la formule $F$ en partant des prémisses $\Gamma$.

## 1.4 Quelques résultats

**Décidabilité** On a déjà indiqué plus haut que le calcul de la valeur de vérité d'une formule quelconque est toujours réalisable en un temps fini : la logique des propositions est **décidable**.

**Déduction** Le théorème de déduction permet de relier la notion de conséquence logique avec l'implication matérielle :

$$\varphi \models \psi \text{ si et seulement si } \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

**Adéquation et complétude** La notion *sémantique* de validité ($\models$) et la notion *procédurale* de prouvabilité ($\vdash$) sont reliées, pour la logique des propositions, par les deux théorèmes fameux :

| | |
|---|---|
| Théorème d'**adéquation** (*soundness*) | Si $\Gamma \vdash F$ alors $\Gamma \models F$ |
| Théorème de **complétude** (*completeness*) | Si $\Gamma \models F$ alors $\Gamma \vdash F$ |

# Chapitre 2

# Logique des prédicats

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Limites de la logique des propositions

Il est assez facile de montrer que l'une des limites les plus importantes de la logique des propositions est qu'elle voit certaines propositions comme des tout inanalysés. Ainsi, la logique des propositions permet de rendre compte du syllogisme sous (19), car elle permet de voir la première proposition comme formée au moyen de plusieurs propositions.

| | | |
|---|---|---|
| (19) | Si jean est malade, il ne sort pas | $P \to \neg Q$ |
| | Jean est malade | $P$ |
| | Jean ne sort pas | $\neg Q$ |

En revanche, le syllogisme sous (20) lui échappe : il est clair que la validité de ce syllogisme est liée à la présence d'éléments qui réapparaissent à plusieurs endroits (*Jean*, *malade*, etc.), mais les quatre propositions en présence sont toutes différentes, et le schéma utilisé précédemment ne peut plus s'appliquer.

| | | |
|---|---|---|
| (20) | Si un homme est malade, il ne sort pas | $P \to \neg Q$ |
| | Jean est un homme malade | $R$ |
| | Jean ne sort pas | $\neg Q'$ |

### 2.1.2 Concepts nouveaux

Pour répondre à cette limite, il faut « ouvrir » les propositions élémentaires, pour mettre en évidence la façon dont elles sont elles-même construites (nous parlons ici des propositions qui ne sont pas construites au moyen d'autres propositions).

La piste suivie trouve son origine dans la tradition logique médiévale et aristotélicienne : on fait intervenir la notion de **prédicat** (par exemple, *malade* dans (20), mais aussi *homme*...), et la notion d'**argument** qui généralise l'idée pré-moderne de **sujet**.

Bien sûr, le fait de décomposer ainsi les propositions rend nécessaire de faire une différence ignorée jusque là (et mal traitée par la tradition pré-moderne), celle que l'on trouve entre la première proposition de (20), qui a une valeur universelle (elle parle de tous les hommes), et la seconde proposition, qui a une valeur singulière (elle ne parle que de Jean). Cette différence tient à ce que l'on appellera la **quantification**.

Mais tous ces éléments nouveaux ne remettent pas en cause tout ce qui a été introduit en logique des propositions : ils viennent plutôt enrichir le langage, dans lequel seront conservés en particulier les connecteurs.

Comme nous l'avons fait pour la logique des propositions, nous allons définir le langage (ou le calcul) de la logique des prédicats en fournissant d'abord une caractérisation syntaxique (§ 2.2), puis une définition sémantique (§ 2.3). Auparavant, essayons de donner une idée intuitive de ce que l'on entendra dorénavant par prédicat, et quantificateur.

#### 2.1.2.1 Prédicats

**Phrases catégoriques** Considérons tout d'abord des phrases qui ont clairement une structure sujet/prédicat (celles que la tradition philosophique appelle *catégoriques*) :

(21) a. Platon est un homme
b. Socrate est mortel
c. Le train siffle
d. Cette bouilloire fuit

Dans chaque phrase on peut identifier : une partie "propriété" (prédicat), et une partie "entité" (individu). Vont leur correspondre en logique de prédicats : des noms de prédicats (constantes de prédicat), et des constantes individuelles, une phrase étant considérée comme l'application (fonctionnelle) d'un prédicat à un individu. Par exemple, avec une "légende" : H = être un homme, p = Platon, etc :

(22) a. H(p)
b. M(s)
c. S(t)
d. F(b)

**Généralisation : prédicats $n$-aires** Les exemples suivants peuvent aussi, surtout dans la tradition aristotélicienne, se décomposer en un sujet, un prédicat :

(23) a. Jean est plus grand que Paul
b. Pierre plume le poulet
c. Alcibiade admire Socrate

Par exemple, pour (23a), le sujet correspond à *jean* et le prédicat pourrait correspondre à *est plus grand que Paul*. Mais alors le schéma d'inférence (24) ne peut pas être retrouvé (cf. (25)), car on ne représente pas le fait que les trois énoncés ont un élément en commun : la **relation** *est plus grand que*.

(24) Jean est plus grand que Paul
Paul est plus grand que Pierre
―――――――――――――――
Jean est plus grand que Pierre

(25) $\dfrac{\begin{array}{l}\mathrm{P_1(j)}\\ \mathrm{P_2(p)}\end{array}}{\mathrm{P_2(j)}}$

La partie commune de ces propositions est la **relation** “plus grand que”. On représente cette relation par un **prédicat binaire**, ce qui donne pour l'exemple précédent[1] :

(26) $\dfrac{\begin{array}{l}\mathrm{P(j,\ p)}\\ \mathrm{P(p,\ i)}\end{array}}{\mathrm{P(j,\ i)}}$

On peut alors généraliser la définition précédente : une phrase atomique sera formée avec un symbole de prédicat $n$-aire (d'**arité** $n$) et $n$ constantes.

L'**ordre** des 'arguments' est évidemment important ; on parle de **place**. Par exemple, les constantes $p$ et $m$ peuvent être de plusieurs façon dans la relation *aime()* : cf. (27). Par conséquent, la “légende” doit être écrite avec précautions : on utilise des **variables** : père(x,y) = x est le père de y.

(27) a. Pierre aime Marie : $A(p, m)$
b. Marie aime Pierre : $A(m, p)$

#### 2.1.2.2 Quantificateurs

**Notion de quantificateur** Les notions précédentes nous permettent de représenter facilement une phrase comme (28a), mais que faire pour la phrase (28b) ?

(28) a. Pierre est gentil $G(p)$
b. Tous sont gentils $G(t)$ ? ?

Il n'y a pas de sujet individuel au sens précédent. Un tel énoncé peut être vu comme énonçant une relation entre deux propriétés (*tous = tous les humains*). Mais comment exprimer cette relation ? (A) on pourrait introduire de nouvelles notations : par exemple $H \subset G$. Mais cela pose divers problèmes. (B) on peut aussi décider d'exprimer cette relation entre propriétés en parlant de tous les individus qui ont ces propriétés : tout individu qui est humain est gentil. Pour exprimer cela, on introduit : (1) une variable ; et (2) un signe pour signifier “pour toute valeur de la variable”. Cela donne : $\forall x\ G(x)$. Ce quantificateur est appelé *quantificateur existentiel.*

**Carré d'Aristote (1)** L'introduction d'un quantificateur permet d'exprimer diverses propositions que nous appellerons quantifiées. Par exemple *tout est éphémère*, qui pourrait s'écrire $\forall x E(x)$, mais aussi *rien n'est éphémère*, qu'on pourrait écrire $\forall x \neg E(x)$.

La tradition frégéenne introduit un second quantificateur, qui n'est pas à proprement parler indispensable (il est définissable au moyen de l'universel), qu'on appelle *quantificateur existentiel.* On le note $\exists$, et il permet de représenter assez naturellement une phrase comme *il a des choses éphémères* : $\exists x E(x)$ “Il existe $x$ tel que $E(x)$”.

[1]Pour valider cette inférence, il faut ajouter une prémisse sur les propriétés de la relation P, en l'occurrence, la transitivité. Par exemple : $\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)))$.

La relation entre les deux quantificateurs est assez facile à voir si on considère, par exemple, que *rien n'est éphémère* ($\forall x \neg E(x)$) peut aussi se dire *il n'existe pas de chose éphémère* ($\neg \exists x E(x)$). Cette équivalence est souvent illustrée sous la forme du fameux carré d'opposition (qui remonte à Aristote), qui permet de faire apparaître clairement les interprétations des quantificateurs (cf. figure 2.1).

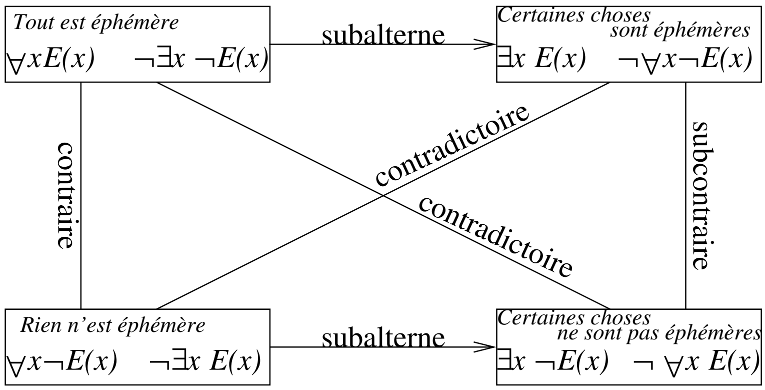


FIG. 2.1 – Carré d'Aristote, quantification non restreinte

Ce carré d'opposition, très utile pour représenter de façon synthétique l'interprétation des quantificateurs et leurs relations, permet aussi de définir en passant les notions de **contrariété** et de **contradiction**, souvent improprement confondues.

Ces notions s'appliquent à des propositions[2], dont on dira qu'elles sont *contradictoires* si d'une part elles ne peuvent pas être vraies en même temps, et d'autre part elle ne peuvent pas être fausses en même temps. Cela signifie que de deux propositions contradictoires, exactement une est vraie dans toute circonstance. La définition du connecteur négatif adoptée ici permet de formuler encore différemment la contradiction : sont contradictoires deux propositions dont l'une est équivalente à la négation de l'autre. Les propositions *contraires*, quant à elles, sont telles qu'elles ne peuvent être vraies en même temps (comme précédemment), mais qu'elles peuvent être fausses en même temps. Ainsi, pour une proposition donnée, on peut trouver plusieurs propositions contraires. Dit autrement, on peut noter que le fait qu'une proposition soit fausse n'entraîne pas qu'une de ses propositions contraires soient vraies. Cette importante distinction est souvent mal traitée dans les emplois courants de ces termes.

**Restriction et univers de discours** Les formules quantifiées que avons considérées jusque là avaient ceci de particulier qu'elles parlaient apparemment de tous les individus de l'univers. C'est en tout cas ce que signifie une formule comme $\forall x E(x)$ : tout individu (au sens d'entité) vérifie la propriété d'être éphémère (si cette formule est vraie). Mais en pratique, la plupart des énoncés quantificationnels, même celui-ci, supposent de façon

[2]Mais on parle souvent, en particulier en sémantique lexicale, de **prédicats** contraires ou contradictoires, ce qui est une généralisation acceptable si on considère que des prédicats comme *marié* et *célibataire* seront dits contradictoire lorsqu'ils forment des propositions contradictoires quand on les applique au même sujet.

sous-entendue un “univers” dans lequel la quantification s’applique. Par exemple, il n’est pas sûr que l’équation “2+2=4” soit éphémère, ou non éphémère : peut-être s’agit-il d’un individu à propos duquel la propriété d’éphémèrité n’est pas définie ; d’une façon plus parlante, on peut relever que la phrase *tout le monde dort* est bien souvent prononcée et jugée vraie alors qu’il n’est pas vrai que tous les individus de la planète dorment. Dans tous ces cas, il faut supposer l’existence d’un **domaine de quantification** implicite, et pourtant indispensable pour juger de la vérité d’une phrase quantifiée. Ce qu’il est important de noter, c’est que ce domaine de quantification n’est pas déterminé par le contenu littéral de la phrase : c’est un élément contextuel. C’est pourquoi dorénavant, nous intéressant seulement au contenu propositionnel des phrases en langue naturelle, nous laisserons de côté la détermination du domaine de quantification : lorsque nous dirons *aucun étudiant n’est venu*, nous parlons bien de la totalité des étudiants de l’univers, c’est l’univers pertinent qui peut varier selon le contexte. Ce que nous venons d’appeler domaine de quantification est aussi appelé **univers de discours**.

Il ne faut pas confondre cette notion avec les notions de **restricteur** et de **portée nucléaire** (*restrictor/scope*) qui sont couramment introduites à propos des phrases quantifiées. Dans la phrase (29), on peut dire que le prédicat *philosophe* restreint le quantificateur *chaque* aux philosophes (il ne dit rien des linguistes, par exemple).

(29) Chaque philosophe est assis

Cette restriction, qui est manipulée naturellement (et informellement) par les mathématiciens lorsqu’ils écrivent une formule comme $\forall x \in \mathbb{N}, \exists x' \in \mathbb{N}$ t.q. $x' = x + 1$, s’exprime en logique des prédicats au moyen du conditionnel (matériel) pour $\forall$, et de la conjonction pour $\exists$ :

(30) a. Tous les philosophes sont assis : $\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$
b. Quelques philosophes sont assis : $\exists x(P(x) \wedge A(x))$

On voit immédiatement la nécessité d’utiliser le conditionnel dans le premier cas, la quantification logique étant par définition non restreinte, la formule $\forall x(P(x) \wedge A(x))$ ne serait vraie que dans un univers où il n’y a que des philosophes (et ils sont tous assis). C’est un peu moins direct, mais on peut voir pourquoi on utilise la conjonction dans le second cas : la forme avec le conditionnel $\exists x(P(x) \rightarrow A(x))$ serait vraie s’il n’y a aucun philosophe, ce qui fait donc perdre à cette formule son caractère *existentiel*.

**Carré d’Aristote (2)** On peut proposer maintenant une nouvelle version du carré d’Aristote, avec des phrases quantificationnelles dans lesquels on distingue une restriction et une portée : voir figure 2.2.

Le rapport entre les formules universelles et existentielles quand elles sont quantifiées peut maintenant être étudié.

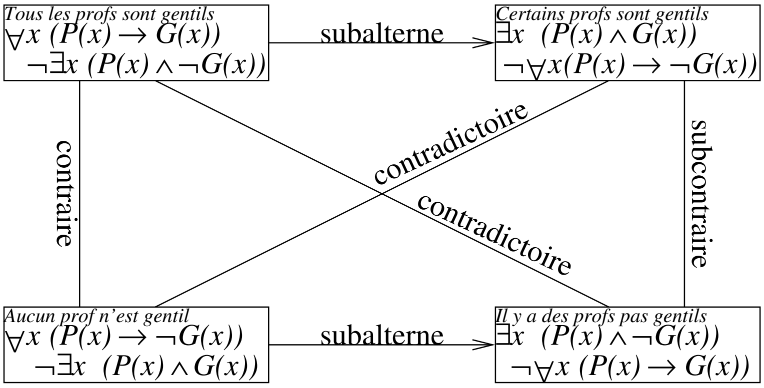


FIG. 2.2 – Carré d'Aristote, quantification restreinte

## 2.2 Syntaxe

### 2.2.1 Formules

En logique des propositions, on définit syntaxiquement les **formules** (ou expressions) **bien formées** — toutes les autres combinaisons de symboles étant exclues. En logique des prédicats, on distinguera deux types d'expressions dans le langage : (1) les **formules (bien formées)**, et (2) les **phrases** qui sont des formules bien formées qui expriment des propositions. Les formules bien formées qui ne sont pas des phrases correspondent intuitivement à des propriétés, ou des relations.
Vocabulaire : Constantes, Noms de prédicat (arité fixe), connecteurs (cf. Lprop), quantificateurs, et un stock infini de variables.

**Définition 1**
(i) Si $A$ est un nom de prédicat du vocabulaire de L, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule.
(ii) Si $\varphi$ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.
(iii) Si $\varphi$ et $\psi$ sont des formules dans L, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.
(iv) Si $\varphi$ est une formule et $x$ une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.
(v) Rien d'autre n'est une formule

On peut, comme précédemment, (1) laisser tomber les parenthèses, (2) décomposer une formule de manière unique en un arbre, toutes les sous-formules d'une formule apparaissant dans l'arbre.

**Définition 2**
Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de $\varphi$, alors $\psi$ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans $\varphi$. Même définition pour $\exists x$.
Exemple : $\exists y(\forall z(\exists w A(z, w) \rightarrow A(y, z)) \wedge A(x, y))$ Il faut distinguer les différentes **occurrences** d'un quantificateur : $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.

**Définition 3**

(a) Une occurrence d'une variable $x$ dans la formule $\phi$ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de $x$ ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans $\phi$.

(b) Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de $\phi$ et $x$ est libre dans $\psi$, alors cette occurrence de $x$ est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

Conséquence : toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul). Noter que dans $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$ les deux occurrences de $x$ sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes). Noter aussi que dans $\forall x A(y)$, le quantificateur ne lie aucune variable.

**Définition 4**

Une **phrase** est une formule sans variable libre.

$\forall x A(y)$ n'est pas une phrase, par exemple.

Une formule avec des variables libres est appelée **fonction propositionnelle** : $P(x) \to G(x)$ est une fonction de l'ensemble des constantes vers les propositions. Notation : $[j/x](P(x) \to G(x))$ a les mêmes conditions de vérités que $P(j) \to G(j)$ (N.B. : on ne remplace que les occurrences libres : $[c/x](\forall x A(x,x))$ reste inchangé).

## 2.3 Sémantique

### 2.3.1 Modèle (extensionnel) du premier ordre

Les propositions ne sont plus, comme en logique des propositions, les atomes de nos formules. Elles parlent d'**individus** et de **propriétés**. Un **modèle mathématique** d'une situation devra minimalement distinguer ces deux notions. La version la plus simple que l'on peut imaginer est le **modèle extentionel du premier ordre** : Il s'agit d'un **ensemble d'individus** (d'entités), à l'intérieur duquel chaque propriété est représentée par un sous-ensemble. Alors, la "possession" d'une propriété va se ramener à l'appartenance au sous-ensemble associé : dire $H(s)$ revient à dire que l'individu **dénoté** par $s$ *appartient* à l'ensemble **dénoté** par $H$. On généralise facilement aux relations $n$-aires.

### 2.3.2 Interprétation

On se donne un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un domaine $D$, un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation $I$[3]. On introduit une fonction de valuation, $V$, qui associe 1 ou 0 à toute formule. $V$ dépend de $\mathcal{M}$.

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

– Si $P$ est un symbole de prédicat, $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$ des constantes, alors

$$V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, ..., c_k)) = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k)\rangle \in I(P)$$

[3] $I$ associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).

– Si $\varphi$ et $\psi$ sont des formules, $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
$V_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$

Avant de proposer des règles pour les formules avec un quantificateur, il faut traiter le cas des formules comprenant des **variables** (libres).

Par exemple, pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que $x$ désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit $g : V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$. En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de $\mathcal{M}$ (et de $I$) mais aussi de $g$ :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) : $[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :

$$V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1,\ldots\, t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, \ldots [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g}\rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie $\varphi$. Mais que signifie ici "vérifier" la formule $\varphi$ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule $\exists x E(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine $D$, appelons-le $d$, tel que, si $g$ est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$. En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :

$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que $\varphi$ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction, $g'$, qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre $g$ et $g'$.

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation $g$, sauf pour $y \mapsto d$. Alors on peut écrire :

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

de même,

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y\ \varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

Finalement, si $\varphi$ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation $g$. Alors on dira, pour toute **phrase** $\varphi$ :

$$\underline{V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1}$$

## 2.4 Quelques résultats

Comme en logique des propositions, on peut définir aussi des méthodes procédurales de preuve, par exemple une extension de la méthode des tableaux. Cependant, il y a une grosse différence avec la logique des propositions : la logique des prédicats est **semi-décidable** : il existe une procédure effective telle que pour toute formule $\varphi$ en entrée,

- si $\varphi$ est valide alors la procédure s'arrête et retourne 'oui'
- sinon ou bien la procédure s'arrête et retourne 'non', ou bien elle ne s'arrête pas.

Pour le reste, on retrouve des résultats analogues à ceux de la logique des propositions : on peut démontrer un **théorème de déduction**, et la logique des prédicats (du premier ordre) est **complète** et **adéquate**.

## 2.5 Conclusion et repères bibliographiques

On a vu maintenant assez d'éléments du langage logique pour vérifier que ce langage possède plusieurs caractéristiques importantes, que l'on peut reprendre ici en guise de conclusion. La logique (moderne) est :

**Vériconditionnelle** On s'intéresse à une seule notion : la vérité ou fausseté d'une proposition (notions exclues : plausibilité, politicale correction, plaisir (*bravo*), adéquation à une situation sociale...).

**Compositionnelle** La signification (c'est-à-dire sa valeur de vérité) d'une proposition complexe dépend uniquement de la signification (i.e. la valeur de vérité) des propositions qui la composent.

**Formelle** Les règles d'écriture, les propriétés, et les conséquences d'une formule sont définies rigoureusement. Pas de désaccord possible une fois les règles du jeu acceptées ; nécessité d'explicitation complète des aspects pertinents en sémantique.

**Calculable** On peut définir des règles de calcul, et il en existe de deux ordres : **syntaxiques**, qui permettent de définir des inférences valides en fonction de la forme des prémisses ; **sémantiques**, qui permettent de calculer la vérité d'une formule à partir de la vérité des sous-formules (tables de vérité).

Ces propriétés font de la logique un outil intéressant pour étudier certains aspects de la signification des phrases de la langue naturelle : c'est précisément l'objet de la sémantique formelle. On peut même pousser plus loin cette remarque, comme l'a fait Richard Montague [1970], et défendre l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de différence de nature entre la langue naturelle et les langages logiques comme celui que nous venons de définir.

La logique moderne est présentée dans une multitude d'ouvrages en français, qui peuvent l'aborder selon différents points de vue (mathématique, philosophique, informatique, etc.). Une introduction très simple à la logique formelle et symbolique se trouve dans [Salem, 1987]. Un excellent ouvrage présente la logique philosophique dans une perspective historique : [Blanché, 1970]. Pour l'approche mathématique de la logique classique, on peut toujours se référer à [Pabion, 1976].

En anglais, il existe un certain nombre d'ouvrages qui présentent la logique avec un point de vue comparable au nôtre, orienté vers la linguistique formelle, voire computationnelle. On trouve dans [Dowty *et al.*, 1981] un langage comparable à $L_p$ et plusieurs variantes de langages du premier ordre ; la logique propositionnelle ainsi que la logique des prédicats sont aussi présentées dans un des meilleurs ouvrages de référence pour la sémantique formelle, [Gamut, 1991]. Les chapitres 3 et 4 de [de Swart, 1998] présentent aussi la logique dans la même perspective. On pourra se référer enfin aux chapitres correspondants de [Partee *et al.*, 1987].

Enfin, il faut citer un des premiers ouvrages d'introduction à la sémantique computationnelle, [Blackburn et Bos, 2005], dont le premier chapitre présente la logique des propositions, et discute de son lien avec la langue naturelle.

**Sources** Ce polycopié a puisé beaucoup de matériel dans [Gamut, 1991], a bénéficié du retour des étudiants de master de linguistique de l'université de Paris 7, et a profité de la présence sur Internet de cours de logique de bonne qualité, celui d'Andi Herzig (`http://www.irit.fr/ACTIVITES/LILaC/Pers/Herzig/C/index.html`), et celui de Paul Egré (`http://paulegre.free.fr/`). Pour les exercices, je tiens à remercier en plus Henriëtte de Swart, et Claire Beyssade.

# Bibliographie

[Arnauld et Nicole, 1662] Antoine Arnauld et Pierre Nicole. *La logique ou l'art de penser.* Flammarion (1970), 1662.

[Blackburn et Bos, 2005] Patrick Blackburn et Johan Bos. *Representation and Inference for Natural Language : A First Course in Computational Semantics.* CSLI Press, Stanford, 2005.

[Blanché, 1970] Robert Blanché. *La logique et son histoire.* Armand Colin, 1970.

[Church, 1941] Alonzo Church. *The calculi of lambda-conversion.* Princeton University Press, Princeton, 1941.

[de Swart, 1998] Henriëtte de Swart. *Introduction to Natural Language Semantics.* Number 80 in CSLI Lecture Notes. CSLI Publications, Stanford, California, 1998.

[Dowty *et al.*, 1981] David R. Dowty, Robert E. Wall, et Stanley Peters. *Introduction to Montague Semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1981.

[Gamut, 1991] L. T. E. Gamut. *Logic, Language and Meaning.* The University of Chicago Press, 1991. vol 1. Introduction to Logic.

[Montague, 1970] Richard Montague. English as a formal language. In B. Visentini et al., éditeurs, *Linguaggi nella Società e nella Tecnica*, pages 189–224. Edizioni di Communità, Milano, 1970. Ré-imprimé dans [Thomason, 1974].

[Pabion, 1976] Jean-François Pabion. *Logique Mathématique.* Hermann, Paris, 1976.

[Partee *et al.*, 1987] Barbara Partee, Alice ter Meulen, et Robert E. Wall. *Mathematical Methods in Linguistics.* Kluwer, 1987.

[Salem, 1987] Jean Salem. *Introduction à la logique formelle et symbolique.* Nathan, 1987.

[Thomason, 1974] Richmond H. Thomason, éditeur. *Formal Philosophy : selected papers of Richard Montague.* Yale University Press, New Haven, 1974.

# Annexe A

# Exercices

## A.1 Propositions

1. Considérer la formule (31). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

   (31) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

2. Reprendre la formule (32), et calculer sa table de vérité composite en écrivant une colonne par sous-formule (1re méthode).

   (32) $((p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (r \rightarrow p))$

| $p$ | $\wedge$ | $q$ | $\rightarrow$ | $r$ | $\vee$ | $r$ | $\rightarrow$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de $L_p$ ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\neg(\neg P \vee Q)$ | (5) | $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$ | (9) | $(P \vee (Q \vee R))$ |
| (2) | $P \vee (Q)$ | (6) | $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) | $-P \vee Q \vee R$ |
| (3) | $\neg(Q)$ | (7) | $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$ | (11) | $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) | $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) | $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ | (12) | $(P \vee P)$ |

4. Montrer que, quelles que soient $\varphi$, $\psi$ et $\chi$, les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg\neg\varphi$ | $\varphi$ | |
| (2) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) | $\varphi \vee \varphi$ | $\varphi$ | idempotence |
| (7) | $\varphi \wedge \varphi$ | $\varphi$ | ” |
| (8) | $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (9) | $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | ” |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | ” |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) | $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | ” |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | ” |

5. Utilisez les résultats de l'exercice 4 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où $\equiv$ note l'équivalence logique).

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $\equiv$ | $\psi \leftrightarrow \varphi$ |
| (2) | $\varphi \rightarrow \neg\varphi$ | $\equiv$ | $\neg\varphi$ |
| (3) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $\equiv$ | $\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$ |
| (4) | $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | $\equiv$ | $\varphi \rightarrow \psi$ |
| (5) | $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$ | $\equiv$ | $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ |
| (6) | $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$ | $\equiv$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ |
| (7) | $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | $\equiv$ | $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ |

6. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës ; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

(33) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente
b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente
d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente
e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente
f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

Situations : (34) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente
b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente
c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

7. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.
(1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
(2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
(3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
(4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que jean a réussi son examen

8. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.
(1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
(2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
(3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
(4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
(5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
(6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi,
je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

9. Montrer que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) est équivalente à une formule ne comprenant que $\wedge$ et $\neg$.

10. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.*

    *Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon.*

    *Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.*

    *Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?*

    Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.
    $P$ = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;
    $Q$ = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.
    Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

## A.2 Prédicats

1. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

   (35) a. Jean est plus beau que Pierre
   b. Charles est beau, mais pas Elsa
   c. Pierre est allé à Toulouse avec Charles sur le vélo neuf de Marie
   d. Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles
   e. Jean et Pierre sont de bons amis
   f. Bien que Paul et Virginie s'aiment profondément, ils se rendent l'un l'autre très malheureux

2. Pour chacune de ces formules du calcul des prédicats, indiquez (a) s'il s'agit d'une négation, une conjonction, une disjonction, une implication, une formule universelle ou une formule existentielle ; (b) la portée des quantificateurs ; (c) les variables libres ; (c) s'il s'agit d'une phrase.
   (i) $(\exists x A(x,y) \wedge B(x))$
   (ii) $\exists x(A(x,y) \wedge B(x))$
   (iii) $\exists x \exists y(A(x,y) \to B(x))$
   (iv) $\neg \exists x \exists y(A(x,y) \to B(x))$
   (v) $\forall x \forall y((A(x,y) \wedge B(y)) \to \exists w C(x,w))$

3. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

   (36) a. Certains enfants ne sont pas capricieux
   b. Tous les enfants ne sont pas capricieux
   c. Pierre n'a pas trouvé toutes les balles
   d. Tous les enfants ont trouvé des balles
   e. Tous les enfants ont trouvé une balle

   (37) a. Un homme qui aime les animaux n'est pas mauvais
   b. Tout homme aime qui l'aime
   c. Qui veut noyer son chien l'accuse de la rage
   d. Celui qui est en retard sera puni
   e. Celui qui veut vraiment quelque chose l'obtient.

f. Tout le monde admire quelqu'un qui admire tout le monde

(38) a. Tout le monde est furieux dès que quelqu'un fait du bruit
b. Un commerçant ne survit que s'il a une clientèle
c. Tout le monde a réussi à l'examen, sauf ceux qui ne sont pas venus
d. Personne n'en veut au monde entier
e. Tous les enfants sont déçus quand un adulte les trompe
f. Si tout le monde l'aime, Marie aime tout le monde
g. Marie aime tous ceux qui l'aiment
h. Si Jean va à Tahiti et qu'il rencontre quelqu'un, il l'épousera

4. **Donkey sentences** Les phrases suivantes se caractérisent par le fait que l'indéfini, sous la portée d'une quantification universelle, s'interprète de façon universelle. Cette situation n'est pas surprenante si on connaît l'équivalence entre $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\exists x \varphi \rightarrow \psi)$ (si $\psi$ ne contient pas d'occurrence libre de $x$). Sur la base de cette équivalence, proposez pour chaque phrase deux traductions en logique des prédicats équivalentes.

(39) a. Paul se fâche dès que quelqu'un fait du bruit
b. Tout le monde se fâche si quelqu'un fait du bruit
c. Tous les touristes qui visitent Paris sont riches
d. Tous les touristes qui visitent Paris l'aiment
e. Tous les touristes qui visitent une ville sont riches
f. Tous les touristes qui visitent une ville l'aiment
g. Si un fermier possède un âne, il le bat
h. Tout le monde est marqué par un amour déçu

5. **Modèles** Soit $M = \langle U, I \rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
$I(a) = \text{Alain}$ ; $I(b) = \text{Béatrice}$ ; $I(c) = \text{Christine}$ ; $I(d) = \text{David}$
$I(H) = \{\text{Alain, David}\}$ ; $I(F) = \{\text{Christine, Béatrice}\}$
$I(A) = \{\langle \text{Alain}, \text{Christine} \rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{Alain}, \text{David} \rangle\}$
$I(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{David} \rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice} \rangle, \langle \text{Christine}, \text{Alain} \rangle\}$

**a.** Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :
a. $D(d, b)$
b. $H(d) \wedge D(c, d)$
c. $D(d, b) \rightarrow F(a)$
d. $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a, c))$

**b.** Construisez le modèle $M' = \langle D, I' \rangle$, tel que (i) $M'$ a le même domaine d'individus que $M$, (ii) $I'$ associe la même dénotation que $I$ aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans $M'$ :
a. $H(c) \wedge H(a)$
b. $\forall x\, (H(x) \rightarrow A(x, c))$
c. $A(a, c) \rightarrow D(c, a)$
d. $\exists x \exists y\, ((H(x) \wedge F(y) \wedge A(x, y)) \vee (H(x) \wedge F(y) \wedge A(y, x)))$

6. **Syllogisme**
(a) Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats
(40) a. Tout ce que Jean n'a pas perdu, il l'a
b. Jean n'a pas perdu un million de francs
c. Jean a un million de francs
(b) Analyser le syllogisme qui consiste à déduire de la conjonction de (40a) et de (40b) la conclusion (40c). Expliquer où se situe l'erreur de raisonnement.