A.3 Quelques corrigés (propositions)

– $\boxed{\text{n}^o \text{ 8, p 26}}$

(41) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup

¬ P ∧ Q ; P = « ce moteur est bruyant » ; Q = « ce moteur consomme beaucoup »

(42) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient

$\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$; P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

(43) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant

$P \wedge Q$; P = « Jean est stupide » ; Q = « Jean est méchant »

(44) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture

$P \vee Q \vee R \vee S$; variante : $(P \vee Q) \wedge (R \veebar S)$
P = « Je vais à la plage à pied » ;
Q = « Je vais à la plage en voiture » ;
R = « Je vais au cinéma à pied » ;
S = « Je vais au cinéma en voiture »

(45) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas

P = « Jean viendra » ; Q = « Paul vient »
$P \rightarrow \neg Q$

(46) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

$\neg P \rightarrow \neg Q$;
P = « tu m'aides quand j'ai besoin de toi » Q = « je t'aide quand tu as besoin de moi »

– $\boxed{\text{n}^o \text{ 5, p 26}}$
Pour la première équivalence : $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Y \wedge X)$ est une tautologie (ex. précédent, n°9). Donc je peux remplacer X par $(A \rightarrow B)$ et Y par $(B \rightarrow A)$ sans modifier le caractère tautologique de la première formule (règle de substitution). Par l'équivalence 4 plus haut, je peux remplacer $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ par $(A \leftrightarrow B)$ (règle de remplacement), la formule résultant étant tautologique. [Il faudrait en toute rigueur ajouter l'étape de remplacement des symboles φ et ψ par A et B.] Le fait que $\models (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ démontre l'équivalence recherchée.

– $\boxed{\text{n}^o \text{ 9, p 26}}$
Pour chaque formule $\sigma = \varphi \odot \psi$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\wedge$ et $\neg$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente σ' ne comprenant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. Alors pour toute formule dont $\sigma = \varphi \odot \psi$ est une sous-formule, on peut trouver une formule équivalente en remplaçant σ par une formule équivalente σ' comprenant seulement les connecteurs $\wedge$ et $\neg$.
Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.
On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi \vee \psi & \equiv & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \rightarrow \psi & \equiv & \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi & \equiv & (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)) \\ & & \neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\ \\ \varphi \veebar \psi & \equiv & (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \end{array}$$

– $\boxed{\text{n}^o \text{ 10, p 27}}$ Soient P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ; et Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie. On cherche une formule φ, formée à partir de P et Q, telle que φ est vraie si la situation est favorable, et fausse sinon. On doit considérer toutes les valeurs possibles de P et Q.

P	Q	Favorable	(Interprétation)
0	0	1	(gauche → princesse et gauche ouvre sur V)
0	1	0	(gauche → princesse et droite ouvre sur V)
1	0	0	(droite → princesse et gauche ouvre sur V)
1	1	1	(droite → princesse et droite ouvre sur V)

Il est facile de s'apercevoir qu'il s'agit de la table de vérité de ($\varphi = P \leftrightarrow Q$). Il faut donc que le prince énonce la proposition :

la porte de droite mène aux appartement de la princesse
si et seulement si
elle s'ouvre quand on énonce une proposition vraie

A.4 Quelques corrigés (prédicats)

1. $\boxed{\text{n}^o \text{ 1, p 28}}$

(47) a. Jean est plus beau que Pierre $B(j,p)$
b. Charles est beau, mais pas Elsa $B(c) \wedge \neg B(e)$
c. Pierre est allé à Toulouse avec Charles sur le vélo neuf de Marie $A(p,t,c,v) \wedge N(v) \wedge A(v,m)$
d. Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles $\neg R(p,n,e) \rightarrow R(p,n,c)$
e. Charles est ennuyeux ou agaçant $E(c) \vee A(c)$
f. Marion est une femme heureuse $F(m) \wedge H(m)$
g. Jean et Pierre sont de bons amis $B(j,p)$
h. Bien que Paul et Virginie s'aiment profondément, ils se rendent l'un l'autre très malheureux $A(p,v) \wedge A(v,p) \wedge M(p,v) \wedge M(v,p)$