

2.4 Exercices

1. Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

(1)	$\neg\neg\varphi$	φ	
(2)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	
(2')	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
(3)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	contraposition
(4)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	
(5)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	
(6)	$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence
(7)	$\varphi \wedge \varphi$	φ	"
(8)	$\varphi \vee \psi$	$\psi \vee \varphi$	commutativité
(9)	$\varphi \wedge \psi$	$\psi \wedge \varphi$	"
(10)	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	associativité
(11)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	"
(12)	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivité
(13)	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	"
(14)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	lois de Morgan
(15)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	"

2. Utilisez les résultats de l'exercice 1 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où \equiv note l'équivalence logique).

(1)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	\equiv	$\psi \leftrightarrow \varphi$
(2)	$\varphi \rightarrow \neg\varphi$	\equiv	$\neg\varphi$
(3)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	\equiv	$\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$
(4)	$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	\equiv	$\varphi \rightarrow \psi$
(5)	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$	\equiv	$(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$
(6)	$\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$	\equiv	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$
(7)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	\equiv	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$

3. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës ; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

- (21) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente
 b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
 c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente
 d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente
 e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente
 f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

- Situations : (22) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente
 b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente
 c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

4. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
 (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
 (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
 (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen