1. **Présupposition**

(1) a. Ce n'est pas Paul qui a menti à Marie
  Quelqu'un a menti à Marie $\exists x(P(x) \wedge M(x,m))$
 b. Ce n'est pas Paul qui volerait dans la caisse
  Il y a une caisse unique[1] $\exists x(C(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow y = x))$
  Pas d'autre présupposition.
 c. Quand André a-t-il déménagé aussi ?
  André a déménagé $D(a)$
  Quelqu'un ($\neq$ André) a déménagé $\exists x(x \neq a \wedge D(x))$
 d. Léa a changé d'avis après avoir parlé à Max.
  Léa a parlé à Max $P(l,m)$
  Léa avait un avis[2] $A(l)$

2. **Logique propositionnelle et table de vérité**

(2) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

Une première décomposition, syntaxique « de surface », pourrait faire apparaître les propositions suivantes.
– Paul ou Marie arrive en avance : α
– La porte est fermée : β
– Ils frappent chez Jean : γ
– Ce n'est pas trop tard : δ

Avant de les décomposer, on peut essayer de se figurer la structure globale de la formule avec ces propositions. La phrase se ré-écrit (3a). Si on traduit *quand* comme *si*, *et* par $\wedge$, et « a si b » par $b \rightarrow a$, cela donne (3b) (parenthèses externes omises pour la lisibilité), ce qui est équivalent à (3c).

(3) a. Quand α et β, γ si δ.
 b. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$
 c. $(\alpha \wedge \beta \wedge \delta) \rightarrow \gamma$

Mais il faut maintenant décomposer les propositions au sens grammatical en propositions au sens logique. Pour α, on est dans un cas courant où la disjonction sur le sujet correspond à une disjonction de deux propositions : $\alpha = P \wedge M$. La proposition β ne peut pas être plus décomposée. Appelons-la F. La proposition δ comprend une négation, soit $\delta = \neg T$.

Considérons maintenant la proposition γ. Elle comprend un pronom, qui se comporte un peu comme une variable. Autrement dit, γ n'a pas de valeur de vérité tant que n'est pas explicité le référent du pronom. Les possibilités sont les suivantes (P_j dénote *Paul frappe chez Jean*, et M_j dénote *Marie frappe chez Jean*).
– *ils = Paul **et** Marie*. (2) se traduit : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \wedge M_j))$
 C'est trop fort par rapport à la phrase initiale.
– *ils = Paul **ou** Marie*. On a alors : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \vee M_j))$
 Cette fois, c'est trop faible (c'est vrai si c'est Paul qui arrive en avance et Marie qui frappe chez Jean), mais on peut éventuellement considérer que le renforcement du sens (c'est celui qui arrive en avance qui frappe à la porte) est dû à un effet pragmatique.
– *ils = celui (parmi Jean et Marie) qui est arrivé en avance*. Dans ce cas, il faut modifier la structure globale de la formule :
 $((P \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow P_j)) \vee ((M \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow M_j))$

La situation décrite correspond à F et T vraies, et P fausse. Il reste donc les variables propositionnelles M, P_j, M_j, qui peuvent chacune être vraies ou fausse. On peut observer

[2]Il y a une caisse unique *dans le contexte* : on ajoute souvent un prédicat pour rendre compte de cette dépendance par rapport au contexte : $\exists x(Ctxt(x) \wedge C(x) \wedge \forall y((Ctxt(y) \wedge C(y)) \rightarrow y = x))$
[2]Présupposition lexicale induite par *changer*.

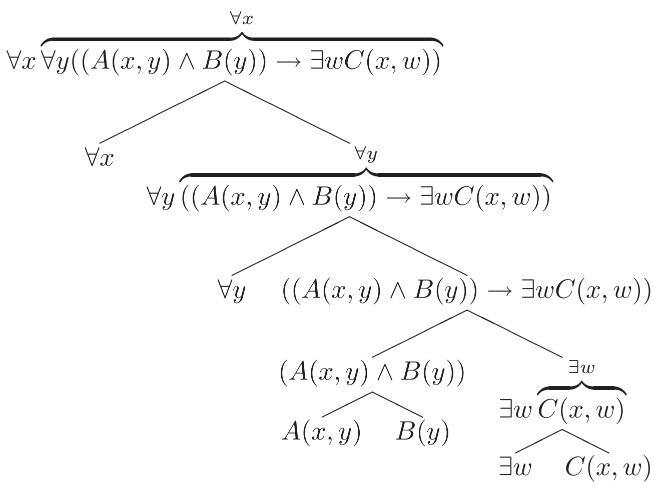
que $(P \wedge F)$ est toujours fausse, et donc l'implication dont elle est l'antécédent toujours vraie, et donc la disjonction toujours vraie. On peut aussi faire la table de vérité suivante.

$((P$	$\wedge$	$F)$	$\rightarrow$	$(\neg$	T	$\rightarrow$	$P_j))$	$\vee$	$((M$	$\wedge$	$F)$	$\rightarrow$	$(\neg$	T	$\rightarrow$	$M_j))$
0	0	1	1	0	1	1	0	**1**	0	0	1	1	0	1	1	0
|	|	|	|	|	|	|	0	|	0	0	|	|	|	|	|	1
|	|	|	|	|	|	|	0	|	1	1	|	|	|	|	|	0
|	|	|	|	|	|	|	0	|	1	1	|	|	|	|	|	1
|	|	|	|	|	|	|	1	|	0	0	|	|	|	|	|	0
|	|	|	|	|	|	|	1	|	0	0	|	|	|	|	|	1
|	|	|	|	|	|	|	1	|	1	1	|	|	|	|	|	0
|	|	|	|	|	|	|	1	|	1	1	|	|	|	|	|	1

Pour que la formule soit fausse, il faut que l'antécédent soit vrai et le conséquent faux, c'est-à-dire que Paul et Marie arrivent en avance, que la porte soit fermée, qu'il ne soit pas trop tard, et qu'ils ne frappent (pourtant) pas ni l'un ni l'autre chez Jean.

3. **Modèles du 1er ordre**

(a)



(b) La formule est fausse dans le modèle donné.

(c) Le modèle le plus simple qui rend la formule vraie est un modèle où $R_1 = R_2 = R_3 = \emptyset$.

4. **Traduction en LPO**

(4) a. Paul ira au cinéma à condition qu'il ne soit pas malade
$C(p) \leftrightarrow \neg M(p)$

b. Jean n'a pas perdu un seul cheveu
$\neg \exists x (C(x) \wedge P(j,x))$

c. Tout le monde reconnaît un acteur
$\forall x \exists y (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$
$\exists y \forall x (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$
$\forall x \forall y (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$

d. Jean cherche à rencontrer un acteur
$\exists y (A(y) \wedge CR(j,y))$
$\forall y (A(y) \rightarrow CR(j,y))$

e. Chaque étudiant, s'il fait un stage, doit le faire valider par tous les professeurs
$\forall x (E(x) \rightarrow (\exists y (S(y) \wedge F(x,y)) \rightarrow \forall z (P(z) \rightarrow V(z,y))))$

f. Tout le monde cherche quelque chose que tout le monde ne trouve pas
$\exists x (C(x) \wedge \neg \forall y (P(y) \rightarrow T(y,x)) \wedge \forall z (P(z) \rightarrow C(z,x)))$
$\forall z \exists x ((P(z) \wedge C(x) \wedge \neg \forall y (P(y) \rightarrow T(y,x))) \rightarrow C(z,x))$