Logique propositionnelle. Montrer que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) est équivalente à une formule ne comprenant que $\wedge$ et $\neg$.

Corrigé : Pour chaque formule $\sigma = \varphi \odot \psi$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\wedge$ et $\neg$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente σ' ne comprenant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. Alors pour toute formule dont $\sigma = \varphi \odot \psi$ est une sous-formule, on peut trouver une formule équivalente en remplaçant σ par une formule équivalente σ' comprenant seulement les connecteurs $\wedge$ et $\neg$.

Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.

On a :

$$\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & \leftrightarrow & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \rightarrow \psi & \leftrightarrow & \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)) \\
 & & \neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\
 & & \\
\varphi \infty \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi))
\end{array}$$