Examen final LG 033 (Sémantique).
Aucun document autorisé.
Durée : 2 heures.

1. On sait qu'avec deux prédicats (par exemple *homme* et *mortel*), les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, et la négation, on peut former quatre propositition contradictoires deux à deux (p. ex. *Tout homme est mortel* et *Un homme n'est pas mortel*).

   Donner les quatre propositions, et pour chacune d'entre elles deux traductions équivalentes en logique des prédicats.

2. Représenter en logique des prédicats les phrases suivantes. On précisera l'interprétation de chaque prédicat utilisé.
   Exemple : « *Si Marie est belle, tout le monde l'aime* » : $(B(m) \to \forall x A(x,m))$
   $B(x) = x$ est beau ; $A(x,y) = x$ aime y.

   (1) a. Tous les enfants sont déçus quand un adulte les trompe
   b. Si tout le monde l'aime, Marie aime tout le monde
   c. Tout le monde a réussi à l'examen, sauf ceux qui ne sont pas venus
   d. Si Jean va à Tahiti et qu'il rencontre quelqu'un, il l'épousera

3. Russel proposait de représenter au même niveau le contenu présupposé et le contenu asserté d'une proposition. Par exemple, pour *C'est Marcel qui est coupable* on aurait la formule $\exists x\, C(x) \land C(m)$ (il existe un coupable et Marcel est coupable). De même, pour *Le Roi de France est chauve*, on aurait la formule suivante[1] $\exists x\, RdF(x) \land \forall y\, (RdF(y) \to y = x) \land C(x)$.

   Proposer une représentation dans le même esprit pour chacun des énoncés suivants.

   (2) a. Jean aussi est venu
   b. Léa a reussi son ascension
   c. Seul le facteur est passé
   d. Paul s'est fait voler sa voiture

4. Soit $M = \langle U, I\rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$.
   $I(a) =$ Alain ; $I(b) =$ Béatrice ; $I(c) =$ Christine ; $I(d) =$ David
   $I(H) = \{$Alain, David$\}$; $I(F) = \{$Christine, Béatrice$\}$
   $I(A) = \{\langle \text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{David}\rangle\}$
   $I(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{David}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$

   a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :
   a. $D(d,b)$
   b. $H(d) \land D(c,d)$
   c. $D(d,b) \to F(a)$
   d. $H(c) \land (H(a) \to D(a,c))$

   b. Construisez le modèle $M' = \langle D, I'\rangle$, tel que (i) M' a le même domaine d'individus que M, (ii) I' associe la même dénotation que I aux constantes d'individus, et (iii) les formules suivantes sont vraies dans M' :
   a. $H(c) \land H(a)$
   b. $\forall x\, (H(x) \to A(x,c))$
   c. $A(a,c) \to D(c,a)$
   d. $\exists x \exists y\, ((H(x) \land F(y) \land A(x,y)) \lor (H(x) \land F(y) \land A(y,x)))$

   On se contentera dans tous les cas d'explications, sans donner une formalisation complète.

[1] La logique avec égalité est nécessaire pour d'exprimer formellement l'unicité.