

Exercice 1

Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies** ?

- (1) a. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
 b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
 c. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q))$
 d. $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
 e. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$

.....Corrigé.....

Pour montrer qu'une formule est une tautologie, il suffit de faire une table de vérité composite et vérifier qu'elle est vraie en toute circonstance.

- (2) a. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \Rightarrow \text{OK}$

$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$				
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

- b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \Rightarrow \text{NOK}$

$((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$						
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

- c. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow \text{NOK}$

$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q))$						
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

d. $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Rightarrow \text{OK}$

$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$										
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

e. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)) \Rightarrow \text{OK}$

$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$										
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercice 2

Montrez que les paires de phrases suivantes sont logiquement équivalentes, en proposant une traduction de chaque phrase en logique des propositions (donner la légende), et en démontrant l'équivalence au moyen de tables de vérité.

- (3)
 - a. Il pleut
 - b. Il n'est pas vrai qu'il ne pleut pas
- (4)
 - a. S'il neige, il fait froid
 - b. Soit il ne neige pas, soit il fait froid
- (5)
 - a. S'il pleut, il ne fait pas chaud
 - b. S'il fait chaud, il ne pleut pas

Exercice 3

Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
- (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
- (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
- (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen

..... Corrigé

1. Traduction en logique. Les propositions élémentaires sont :

- M : Marie est contente
- J : Jean a réussi son examen

Traduction des phrases en logique des propositions :

1. $(J \wedge \neg M)$
2. $\neg M$
3. $(J \rightarrow M)$
4. $(M \vee \neg J)$

On cherche à démontrer que :

- $(1) \rightarrow (2)$, soit $((J \wedge \neg M) \rightarrow \neg M)$
- $(3) \leftrightarrow (4)$ soit $((J \rightarrow M) \leftrightarrow (M \vee \neg J))$

2. Table de vérité

J	M	$\neg M$	$\neg J$	$(J \wedge \neg M)$	$(J \rightarrow M)$	$(M \vee \neg J)$	$((J \wedge \neg M) \rightarrow \neg M)$	$((J \rightarrow M) \leftrightarrow (M \vee \neg J))$
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1

Lecture de la table : Les deux dernières colonnes sont toujours vraies, soit (1) implique logiquement (2) et (3) et (4) sont logiquement équivalents.

Exercice 4

Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées.

- (6)
- a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
 - b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
 - c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
 - d. Il est faux que si Marie se repose et Léa lit le journal, Jean fait la vaisselle.

Situations :

1. Jean fait la vaisselle, Marie se repose, Léa lit le journal.
2. Jean ne fait pas la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa lit le journal.
3. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

..... Corrigé

Pour répondre à la question il faut d'abord proposer une représentation en logique des propositions de chaque phrase (ce qui conduit dans certains cas à expliciter les éventuelles ambiguïtés). On propose : L = "Léa lit le journal", J = "Jean fait la vaisselle", et M = "Marie se repose".

- a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.

La conjonction *parce que* apporte une relation causale qui ne peut être formalisée en logique des propositions, il ne reste donc que les conditions de vérité : on peut dire que "A parce que B" ne peut être vraie que si A et B sont vraies. D'où la proposition $(J \wedge (M \wedge L))$ — qui est logiquement équivalente à la formule $((J \wedge M) \wedge L)$, ce qui explique qu'on s'autorise quelque fois à l'écrire tout simplement $(J \wedge M \wedge L)$.

- b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.

Il y a une ambiguïté syntaxique dans cette phrase, qui peut être analysée soit comme la conjonction d'une conditionnelle et d'une phrase simple — la formule est alors $((M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J)$, soit comme une conditionnelle dont la principale est une conjonction — formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$.

- c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.

La phrase est une disjonction, on peut donc proposer la formule $((J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L))$. La question de la "traduction" de *soit... soit* est une question délicate, et on pourrait être tenté de proposer ici un "ou exclusif" plutôt que la version inclusive présentée. On s'abstiendra cependant de le faire, en s'appuyant sur la thèse dominante en sémantique/pragmatique (voir par exemple Levinson) selon laquelle la signification de la disjonction en langue naturelle est inclusive, et qu'elle fait l'objet, dans les contextes appropriés, d'un « renforcement pragmatique » qui conduit à une lecture exclusive.

- d. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

Cette phrase comporte une négation qui prend sans ambiguïté dans sa portée le reste de la phrase, on peut donc proposer la formule $\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$.

Pour le calcul et la réponse à la question, on pouvait soit remplir une table de vérité pour chacune des formules envisagées, en ne faisant figurer dans la table que la situation considérée (voir ci-dessous), soit faire le calcul de manière explicite pour chaque situation. Par exemple, la formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$ vaut, dans la situation n°2, $(0 \rightarrow (\neg 1 \wedge \neg 0))$, ce qui est égal à $(0 \rightarrow (0 \wedge 1))$, et donc à $(0 \rightarrow 0)$, et donc à 1. La phrase b, sous cette analyse, est donc vraie dans la situation 2.

La table suivante donne la valeur de toutes les formules envisagées dans les 3 situations, sans faire figurer les calculs intermédiaires. La paire de parenthèses externes est omise (le cas échéant).

	J	M	L	$J \wedge M \wedge L$	$(M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J$	$M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J)$	$(J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L)$	$\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$
				(a)	(b1)	(b2)	(c)	(d)
sit. 1	1	1	1	1	0	0	1	0
sit. 2	0	0	1	0	1	1	1	0
sit. 3	1	0	0	0	0	1	0	0

Exercice 5

Présenter les tables de vérité des formules suivantes :

- (7) a. $\neg(\neg p \wedge p)$
 b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
 c. $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow (a \wedge b)$
 d. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow r$

..... Corrigé.....

Notation compacte : la valeur d'une formule est en colonne sous son signe principal.

$\neg$	$($	$\neg$	p	$\wedge$	p	$)$
1		1	0	0	0	
1		0	1	0	1	

$($	$($	p	$\rightarrow$	q	$)$	$\rightarrow$	$($	q	$\rightarrow$	p	$)$	$)$
		0	1	0		1		0	1	0		
		0	1	1		0		1	0	0		
		1	0	0		1		0	1	1		
		1	1	1		1		1	1	1		

$($	$($	$($	a	$\rightarrow$	b	$)$	$\wedge$	a	$)$	$\rightarrow$	$($	a	$\wedge$	b	$)$	$)$
			0	1	0		0	0		1		0	0	0		
			0	1	1		0	0		1		0	0	1		
			1	0	0		0	1		1		1	0	0		
			1	1	1		1	1		1		1	1	1		

$($	$($	$($	p	$\vee$	q	$)$	$\wedge$	$($	p	$\vee$	r	$)$	$\rightarrow$	r	$)$
			0	0	0		0		0	0	0		1	0	
			0	1	0		1		0	1	1		1	1	
			0	1	1		0		0	0	0		1	0	
			0	1	1		1		0	1	1		1	1	
			1	1	0		1		1	1	0		0	0	
			1	1	0		1		1	1	1		1	1	
			1	1	1		1		1	1	0		0	0	
			1	1	1		1		1	1	1		1	1	

Exercice 6

Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- | | | | |
|------|-------------------------------------|--|----------------|
| (1) | $\neg\neg\varphi$ | φ | |
| (2) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) | $\varphi \vee \varphi$ | φ | idempotence |
| (7) | $\varphi \wedge \varphi$ | φ | " |
| (8) | $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |
| (9) | $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | " |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | " |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) | $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | " |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | " |

..... Corrigé

Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).

Par exemple (n° 2) :

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Exercice 7

Trouvez une formule équivalente à $(P \rightarrow Q)$ qui n'utilise pas le connecteur $\rightarrow$, et montrez leur équivalence en donnant la table de vérité des deux formules.

..... Corrigé

Pour chaque formule $\varphi = P \odot Q$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\rightarrow$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente φ' ne comprenant que les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.

Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.

$$\begin{aligned} \text{On a : } P \rightarrow Q &\leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\ P \rightarrow Q &\leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
0	0	1	$(1 \vee 0) = 1$	$\neg(0 \wedge 1) = 1$
0	1	1	$(1 \vee 1) = 1$	$\neg(0 \wedge 0) = 1$
1	0	0	$(0 \vee 0) = 0$	$\neg(1 \wedge 1) = 0$
1	1	1	$(0 \vee 1) = 1$	$\neg(1 \wedge 0) = 1$