

Exercice 1

Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies** ?

- (1) a. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
- b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
- c. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q))$
- d. $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- e. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$

Exercice 2

Montrez que les paires de phrases suivantes sont logiquement équivalentes, en proposant une traduction de chaque phrase en logique des propositions (donner la légende), et en démontrant l'équivalence au moyen de tables de vérité.

- (2) a. Il pleut
- b. Il n'est pas vrai qu'il ne pleut pas
- (3) a. S'il neige, il fait froid
- b. Soit il ne neige pas, soit il fait froid
- (4) a. S'il pleut, il ne fait pas chaud
- b. S'il fait chaud, il ne pleut pas

Exercice 3

Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
- (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
- (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
- (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen

Exercice 4

Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées.

- (5) a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
- b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
- c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
- d. Il est faux que si Marie se repose et Léa lit le journal, Jean fait la vaisselle.

- Situations :
- 1. Jean fait la vaisselle, Marie se repose, Léa lit le journal.
 - 2. Jean ne fait pas la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa lit le journal.
 - 3. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

Exercice 5

Présenter les tables de vérité des formules suivantes :

- (6) a. $\neg(\neg p \wedge p)$
 b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
 c. $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow (a \wedge b)$
 d. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow r$

Exercice 6

Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- | | | | |
|------|-------------------------------------|--|----------------|
| (1) | $\neg\neg\varphi$ | φ | |
| (2) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) | $\varphi \vee \varphi$ | φ | idempotence |
| (7) | $\varphi \wedge \varphi$ | φ | " |
| (8) | $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |
| (9) | $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | " |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | " |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) | $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | " |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | " |

Exercice 7

Trouvez une formule équivalente à $(P \rightarrow Q)$ qui n'utilise pas le connecteur $\rightarrow$, et montrez leur équivalence en donnant la table de vérité des deux formules.