

Exercice 1

A l'exercice 3 de la feuille n°1, nous avons vu que la phrase *Tu n'es ni mon ami ni mon ennemi* pouvait se représenter en logique des propositions par $(\neg A \wedge \neg E)$.

1. Cette formule est-elle équivalente à $\neg(A \wedge E)$? Justifiez votre réponse à l'aide d'une table de vérité.
2. Comment traduiriez-vous $\neg(A \wedge E)$ en langue naturelle ?

..... Corrigé

1. Dans la table de vérité ci-dessous, on peut voir que les formules $(\neg A \wedge \neg E)$ et $\neg(A \wedge E)$ n'ont pas les mêmes valeurs de vérité aux lignes 2 et 3 (voir les cellules grisées). Ces formules ne sont donc pas équivalentes.

A	E	$\neg A$	$\neg E$	$(\neg A \wedge \neg E)$	$(A \wedge E)$	$\neg(A \wedge E)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0

2. *Il n'est pas vrai qu'à la fois tu es mon ami et mon ennemi.*

Exercice 2

Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- | | | | |
|------|-------------------------------------|--|----------------|
| (1) | $\neg\neg\varphi$ | φ | |
| (2) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) | $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) | $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) | $\varphi \vee \varphi$ | φ | idempotence |
| (7) | $\varphi \wedge \varphi$ | φ | " |
| (8) | $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |
| (9) | $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | " |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | " |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) | $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | " |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | " |

..... Corrigé

Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).

Par exemple (n° 2) :

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Exercice 3

Soit l'expression $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. Quelles sont les formules bien formées que l'on peut obtenir en plaçant des couples de parenthèses? Donnez l'arbre de décomposition de deux des formules obtenues.

..... Corrigé

Si on prend comme signe principal la première flèche, on a deux possibilités. Si on prend la seconde flèche, il n'y a qu'une possibilité, si on prend la troisième, on a deux possibilités (symétriques). Cela donne, avec une notation simplifiée des arbres syntaxiques :

