

Exercice 1

Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

- (1)
- a. Jean est plus beau que Pierre
 - b. Charles est beau, mais pas Elsa
 - c. Pierre est allé à Toulouse avec Charles sur le vélo neuf de Marie
 - d. Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles
 - e. Charles est ennuyeux ou agaçant
 - f. Marion est une femme heureuse
 - g. Jean et Pierre sont de bons amis
 - h. Bien que Paul et Virginie s'aiment profondément, ils se rendent l'un l'autre très malheureux

.....Corrigé.....

- (2)
- a. Jean est plus beau que Pierre $B(j, p)$
 - b. Charles est beau, mais pas Elsa $B(c) \wedge \neg B(e)$
 - c. Pierre est allé à Toulouse avec Charles sur le vélo neuf de Marie $A(p, t, c, v) \wedge N(v) \wedge P(m, v)$
 - d. Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles $\neg R(p, n, e) \rightarrow R(p, n, c)$
 - e. Charles est ennuyeux ou agaçant $E(c) \vee A(c)$
 - f. Marion est une femme heureuse. $F(m) \wedge H(m)$
 - g. Jean et Pierre sont de bons amis. $B(j, p)$
 - h. Bien que Paul et Virginie s'aiment profondément, ils se rendent l'un l'autre très malheureux. $A(p, v) \wedge A(v, p) \wedge M(p, v) \wedge M(v, p)$

Exercice 2

Traduire en logique des prédicats, de la façon la plus directe, les trois phrases suivantes. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

- (3)
- a. Tous les professeurs sont méchants
 - b. Aucun professeur n'est gentil
 - c. Il est faux qu'il y a des professeurs gentils

Exercice 3

Traduisez en logique des prédicats les propositions suivantes, et, en cas d'ambiguïté, donnez toutes les traductions correspondantes.

- (4)
- a. Certains individus ne sont ni sémanticiens, ni musiciens.
 - b. Certains individus ne sont pas à la fois sémanticiens et musiciens.
 - c. Tous les musiciens ne sont pas sémanticiens.
 - d. Il est faux que certains sémanticiens ne sont pas musiciens.
 - e. Tous les félins sont des animaux.
 - f. Un individu est fatigué seulement s'il a sommeil.
 - g. Il n'y a aucun membre de l'équipe qui ne se soit pas entraîné.
 - h. Les baleines ne sont pas des poissons.
 - i. Tous les poissons ne nagent pas dans l'océan.
 - j. S'il est vrai que, si tous les gens sont vertueux, tous les gens sont heureux, alors tous les gens vertueux sont heureux.
 - k. Il y a des baleines à bosse.
 - l. Si les baleines sont des mammifères et si les mammifères sont des vertébrés, alors, si les baleines sont des animaux aquatiques, il y a des vertébrés qui sont des animaux aquatiques.
 - m. Il existe quelqu'un tel que s'il mange, tout le monde boit.
 - n. Pour être un poisson, il faut savoir nager et ne pas posséder de poumons.

Exercice 4

Traduire en logique des prédicats les phrases suivantes, en donnant plusieurs formules en cas d'ambiguïté.

- (5)
- a. Tous les artistes préfèrent un livre.
 - b. S'il faut que personne ne chante pour que Paul soit content, alors il y a quelqu'un qui chante.
 - c. Tout le monde cherche quelque chose, mais tout le monde ne le trouve pas.
 - d. Aucun journaliste n'a interrogé tous les témoins d'un accident.

..... Corrigé

On demande des formules logiques, il est crucial que la syntaxe soit strictement respectée, en particulier les parenthèses. Par ailleurs, il est très utile d'accompagner la formule logique d'une paraphrase qui évite l'ambiguïté de la phrase initiale.

- (6) a. Tous les artistes préfèrent un livre.
 b. S'il faut que personne ne chante pour que Paul soit content, alors il y a quelqu'un qui chante.
 c. Tout le monde cherche quelque chose, mais tout le monde ne le trouve pas.
 d. Aucun journaliste n'a interrogé tous les témoins d'un accident.

(6-a) Cette phrase présente une ambiguïté ultra classique : soit les artistes ont chacun.e un livre préféré, qui n'est pas forcément la même (interprétation la plus proche de la structure syntaxique de la phrase, puisqu'alors le quantificateur universel a portée sur le quantificateur existentiel introduit par l'indéfini objet) (a) ; soit il y a un livre que toutes les artistes préfèrent (interprétation où l'indéfini en position d'objet vient prendre portée sur le sujet de la phrase) (b).¹

$$(a) \forall x(Ax \rightarrow \exists y(Ly \wedge Pxy))$$

$$(b) \exists y(Ly \wedge \forall x(Ax \rightarrow Pxy))$$

(6-b) Dans cette phrase, il y a plusieurs propositions quantifiées qui sont indépendantes (pas d'interférence de portée). On peut donc déterminer leur représentation séparément :

$$\text{Personne ne chante} \quad \forall x(Px \rightarrow \neg Cx) \text{ ou } \neg \exists x(Px \wedge Cx)$$

$$\text{Paul est content} \quad Hp$$

$$\text{Il y a quelqu'un qui chante} \quad \exists x(Px \wedge Cx)$$

Quant à la structure générale de la formule, elle comprend deux conditionnelles enchâssées, l'une exprimée avec *si φ alors ψ* , qu'on représente naturellement $\varphi \rightarrow \psi$, l'autre exprimée avec *il faut α pour que β* . Dans ce dernier cas, c'est la formule $\beta \rightarrow \alpha$ qu'il faut choisir, puisque la phrase exprime une relation *nécessaire* (puisque il faut α pour β , alors dès qu'on a β , c'est qu'on a α), mais pas (nécessairement) *suffisante* (autrement dit, ce n'est pas parce qu'on a α qu'on a β). Si on met tout cela ensemble, cela donne :

$$\left((Hp \rightarrow \forall x(Px \rightarrow \neg Cx)) \rightarrow \exists y(Py \wedge Cy) \right)$$

1. On pouvait tenter de traduire *préférer* par une relation ternaire $P' = \text{« aimer plus que »}$, de sorte que la sous-formule Pxy pourrait être remplacée par $\forall z(I(z) \rightarrow P'xyz)$. Mais cette façon d'expliciter la sémantique lexicale n'était pas demandée, entre autres parce qu'elle pose des difficultés : il faut choisir si dans cette phrase l'infirmière est préférée à toutes les infirmières (choix fait dans la proposition précédente), ou à toutes les femmes, ou à toutes les choses... Une telle information n'est pas explicitement présente dans la phrase.

(6-c) Le sémanticien pervers peut trouver deux sources d'ambiguïté dans cette phrase : d'une part la portée respective des deux SN quantifiés de la première proposition, d'autre part l'interprétation de l'interaction entre l'universel et la négation dans la seconde proposition. Cela fait sur le papier 4 interprétations, qui ne sont pas toutes également accessibles aux locuteurs, et qui par ailleurs posent dans certains cas des problèmes techniques (du type *donkey sentence*). Voici quelques réponses possibles, dans l'ordre de leur plausibilité (selon mon jugement).

Pour toute personne, il y a une chose qu'elle cherche, et il y a des personnes qui ne trouvent pas (au moins) une chose qu'elles cherchent

$$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Cy \wedge Rxy)) \wedge \exists x(Px \wedge \exists y(Cy \wedge Rxy \wedge \neg Txy))$$

Il y a une chose (par exemple le bonheur) que tout le monde cherche, et que tout le monde ne trouve pas (= et que pas tout le monde trouve)

$$\exists x(Cx \wedge \forall y(Py \rightarrow Ryx) \wedge \neg \forall y(Py \rightarrow Tyx))$$

Pour toute personne, il y a une chose qu'elle cherche sans la trouver

$$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Cy \wedge Ryx \wedge \neg Tyx))$$

Il y a une chose que tout le monde cherche et que personne ne trouve

$$\exists x(Cx \wedge \forall y(Py \rightarrow Ryx) \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg T(zx)))$$

(6-d) Deux lectures possibles selon la portée étroite ou large de l'indéfini *un accident*.

$$\exists x(Ax \wedge \forall y(Tyx \rightarrow \neg \forall z(Jz \rightarrow Izy)))$$

$$\neg \exists z(Jz \wedge \forall x(Ax \rightarrow \forall y(Tyx \rightarrow Izy)))$$

Exercice 1

Parmi les phrases suivantes, indiquez celles qui sont des propositions.

- (7)
- a. Sortez d'ici immédiatement !
 - b. Quel temps fait-il ?
 - c. Il pleut alors que je ne vois aucun nuage.
 - d. Elle prit son manteau et son parapluie, puis partit.
 - e. Pourquoi feriez vous cela ?
 - f. Si Sarah gagne, je perds.
 - g. Il pleuvra demain.
 - h. Tous les félins sont agiles, même s'ils ne le montrent pas tous.
 - i. Allons-y.
 - j. Dans son panier il y a deux tomates et quatre pommes.

..... Corrigé

- (8)
- a. Il ne s'agit pas d'une proposition. C'est un impératif, qui n'est ni vrai ni faux.
 - b. Il ne s'agit pas d'une proposition. Les questions n'affirment rien explicitement et non donc pas vocation à être vraies ou fausses.
 - c. Il s'agit d'une proposition. En effet, c'est une phrase susceptible d'être vraie ou fausse.
 - d. De même, il s'agit bien d'une proposition.
 - e. Il ne s'agit pas d'une proposition, c'est une question.
 - f. Il s'agit d'une proposition.
 - g. C'est un exemple délicat. À l'instant de l'énonciation, cette phrase n'est ni vraie ni fausse car porte sur un événement qui se déroulera (ou non) dans le futur. Cependant, un observateur omniscient pourrait lui attribuer une valeur de vérité. On peut donc considérer que cette phrase est une proposition.
 - h. Il s'agit d'une proposition.
 - i. Il ne s'agit pas d'une proposition. C'est une phrase non assertive, qui n'est pas donc pas susceptible d'être vraie ou fausse.
 - j. Il s'agit d'une proposition.

Exercice 2

Pour chacune des phrases suivantes, identifiez les propositions élémentaires qui la constituent, et proposez une "reformulation" au moyen des connecteurs *et*, *ou* et *si* et de la négation.

Exemple : *Lucas est actif et brouillon*. comprend deux propositions : (1) Lucas est actif, et (2) Lucas est brouillon. La phrase peut être reformulée en '*Lucas est actif et Lucas est brouillon*'.

- (9)
- a. L'infirmier est malade ou en retard.
 - b. Sam et Pam se sont mariés.
 - c. Sam et Pam aiment les animaux.
 - d. Luce est en retard mais si Annie est là, on va pouvoir ouvrir la porte.
 - e. Tu n'es ni mon ami ni mon ennemi.
 - f. Si tu as la moyenne, tu valides l'année, mais tu peux valider l'année sans avoir la moyenne.

..... Corrigé

- (10) a. L'infirmier est malade ou en retard.
 $P = \text{l'infirmier est malade}$; $Q = \text{l'infirmier est en retard}$
 Reformulation : L'infirmier est malade ou l'infirmier est en retard.
 Formellement : $(P \vee Q)$
- b. Sam et Pam se sont mariés.
 On a ici comme souvent une ambiguïté lexicale : (A) le verbe *se marier* peut-être vu comme un prédicat collectif dont le sujet est nécessairement pluriel (*se marier* = *se marier ensemble*) — dans ce cas la proposition ne peut pas être décomposée car le fait de se marier ensemble est plus que la conjonction des deux propositions “*x s’est marié*” ; (B) le verbe peut-être lu de manière distributive : dans ce cas, la propriété de s’être marié est attribuée à chacun des deux sujets (que ce soit ensemble ou non) et on peut décomposer cette proposition en une conjonction de deux propositions élémentaires : *Sam s’est marié(e)* et *Pam s’est marié(e)*.
- c. Sam et Pam aiment les animaux.
 Le prédicat est forcément distributif ici : conjonction de deux propositions.
- d. Luce est en retard mais si Annie est là, on va pouvoir ouvrir la porte.
 Propositions élémentaires : *Luce est en retard* (L) ; *Annie est là* (A) ; *On va pouvoir ouvrir la porte* (P).
 Luce est en retard et si Annie est là, alors on va pouvoir ouvrir la porte
 Formellement : $(L \wedge (A \rightarrow P))$
- e. Tu n’es ni mon ami ni mon ennemi.
 Prop. élémentaires : tu es mon ami ; tu es mon ennemi.
 Reformulation : Il est faux que tu es mon ami et il est faux que tu es mon ennemi.
- f. Si tu as la moyenne, tu valides l’année, mais tu peux valider l’année sans avoir la moyenne.
 Formulation un peu plus explicite : si tu as la moyenne, alors tu valides l’année, mais il n’est pas vrai que si tu n’as pas la moyenne, tu ne valides pas l’année.
si tu as la moyenne, alors tu valides l’année et il est faux que si il est faux que tu as la moyenne alors il est faux que tu valides l’année.
 $((M \rightarrow V) \wedge \neg(\neg M \rightarrow \neg V))$

Exercice 3

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

- (11) a. Ce moteur n’est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
 b. Il n’est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient.
 c. Jean n’est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
 d. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
 e. Jean ne viendra que si Paul ne vient pas.
 f. Si tu ne m’aides pas quand j’ai besoin de toi, je ne t’aiderai pas quand tu auras besoin de moi.

..... Corrigé

- (12) a. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
 $P = \text{« ce moteur est bruyant »} ; Q = \text{« ce moteur consomme beaucoup »}$
 $(\neg P \wedge Q)$
- b. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient.
 $P = \text{« Pierre vient »} ; Q = \text{« Marie vient »} ; R = \text{« Jean vient »}$
 Cette phrase est ambiguë. Elle peut s'interpréter comme $\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$ ou comme
 $((Q \vee R) \rightarrow \neg P)$;
- c. Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
 $P = \text{« Jean est stupide »} ; Q = \text{« Jean est méchant »}$
 $(P \wedge Q)$
- d. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
 $P = \text{« Je vais à la plage à pied »} ;$
 $Q = \text{« Je vais à la plage en voiture »} ;$
 $R = \text{« Je vais au cinéma à pied »} ;$
 $S = \text{« Je vais au cinéma en voiture »}$
 $(P \vee Q \vee R \vee S)$; variante ($\forall = \text{"ou exclusif"}$) : $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$
- e. Jean ne viendra que si Paul ne vient pas.
 $P = \text{« Jean viendra »} ; Q = \text{« Paul vient »}$
 La négation complique les choses. Raisonnons avec un autre exemple : « Jean ne viendra que s'il fait beau »
 4 cas : Jean vient et il fait beau Donc ici, c'est 'jean vient'
 Jean vient et il ne fait pas beau FAUX!
 Jean ne vient pas et il fait beau
 Jean ne vient pas et il ne fait pas beau
 $\rightarrow \text{'il fait beau'}$ Si on revient à la phrase initiale, on a : $(P \rightarrow \neg Q)$
- f. Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi.
 Une traduction possible est $(\neg P \rightarrow \neg Q)$.
 $P = \text{« tu m'aides quand j'ai besoin de toi »} ;$
 $Q = \text{« je t'aide quand tu as besoin de moi »}$
 On peut aussi considérer les deux *quand* comme des *si*. La traduction est alors
 $((Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (S \rightarrow \neg R))$.
 $P = \text{tu m'aides} ;$
 $Q = \text{j'ai besoin de toi} ;$
 $R = \text{je t'aide} ;$
 $S = \text{tu as besoin de moi}$

Exercice 4

Traduire, le plus simplement possible, en langue naturelle les formules suivantes, sachant que

p = Jean est heureux

q = Jean chantonne

r = Jean énerve sa voisine

- (13) a. $q \rightarrow p$
 b. $q \rightarrow r$
 c. $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$

..... Corrigé

a. Quand il chantonne, Jean est heureux.

b. Quand Jean chantonne, il énerve sa voisine.

c. La formule $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$ est ambiguë. Il faut donc commencer par la désambigüiser. Il y a cinq possibilités :

1. $(\neg p \rightarrow (q \rightarrow r))$: Quand Jean n'est pas heureux, s'il chantonne, il énerve sa voisine.
2. $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$: Si Jean chantonne quand il n'est pas heureux, il énerve sa voisine.
3. $(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)$: S'il n'est pas vrai que Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
4. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow r)$: Il n'est pas vrai que si Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
5. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$: Il n'est pas vrai que si Jean est heureux, il énerve sa voisine lorsqu'il chantonne.

Exercice 5

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

- (14) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.
 b. Il est faux que Paul est venu.
 c. Jean et Marie ne viendront que si le métro fonctionne
 d. Jean viendra, à moins bien sûr que Marie ne vienne pas

..... Corrigé

- P : Pierre est venu P : Jean viendra
 Q : Marie est venue Q : Marie viendra
 R : Paul est venu R : Le métro fonctionne
 (1a) : $P \wedge Q \wedge \neg R$ (1c) : $P \wedge Q \rightarrow R$
 (1b) : $\neg R$ (1d) : $P \leftrightarrow Q$

Jean et Marie viennent	le métro fonc- tionne	(1c)
$P \wedge Q$	R	
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Jean vient	Marie vient	(1d)
P	Q	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice 6

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

- (15)
- La récolte a été bonne bien qu'il n'ait pas beaucoup plu cette année.
 - Cette fleur n'est ni jaune ni rouge.
 - Olivier prend un numéro bien qu'il n'aime pas attendre.
 - Il pleure et rit.
 - Pour que je parle espagnol, il est nécessaire que je prenne des cours.
 - Bien que 2 soit un nombre pair, c'est un nombre premier.
 - Si les mathématiques sont une science, elles ne sont ni un art, ni un jeu.
 - Si la loi est rigoureuse sans être injuste, les citoyens ont tort de s'en prendre à elle.
 - Pour que ce quadrilatère soit un carré, il est nécessaire mais non suffisant que ses diagonales soient perpendiculaires.

..... Corrigé

- (16)
- P : la récolte a été bonne ; Q : Il a beaucoup plu cette année. ($P \wedge \neg Q$)
 - P : cette fleur est rouge ; Q : cette fleur est jaune. ($\neg P \wedge \neg Q$)
 - P : Olivier prend un numéro ; Q : Olivier aime attendre. ($P \wedge \neg Q$)
 - P : il pleure ; Q : il rit. ($P \wedge Q$)
 - P : je parle espagnol ; Q : je prends des cours. ($P \rightarrow Q$)
 - P : 2 est un nombre pair ; Q : 2 est un nombre premier. ($P \wedge Q$)
 - P : les mathématiques sont une science ; Q : les mathématiques sont un art ; R : les mathématiques sont un jeu. ($P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$)
 - P : la loi est rigoureuse ; Q : la loi est injuste ; R : les citoyens ont tort de s'en prendre à elle. ($(P \wedge \neg Q) \rightarrow R$)
 - P ce quadrilatère est un carré ; Q : les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires. ($(P \rightarrow Q) \wedge \neg(Q \rightarrow P)$)

Exercice 7

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

- (17) a. Zlork et Patchi sont kresk, mais Sprutz non.
 b. Sprutz n'est pas kresk.
 c. Zlork et Patchi sont kresk seulement si Ribo smotche.
 d. Zlork est kresk, sauf si Patchi ne l'est pas.

..... Corrigé

- P : Zlork est kresk P : Zlork est kresk
 Q : Patchi est kresk Q : Patchi est kresk
 R : Sprutz est kresk R : Ribo smotche
 (1a) : $P \wedge Q \wedge \neg R$ (1c) : $P \wedge Q \rightarrow R$
 (1b) : $\neg R$ (1d) : $P \leftrightarrow Q$

Zlork et Patchi sont kresk $P \wedge Q$	Ribo smotche R	(1c)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Zlork est kresk P	est Patchi est kresk Q	(1d)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1