Exercice 1

Traduire en logique des prédicats les phrases suivantes, en donnant plusieurs formules en cas d'ambiguïté.

(1) a. Tous les artistes préfèrent un livre.
b. S'il faut que personne ne chante pour que Paul soit content, alors il y a quelqu'un qui chante.
c. Tout le monde cherche quelque chose, mais tout le monde ne le trouve pas.
d. Aucun journaliste n'a interrogé tous les témoins d'un accident.

Corrigé

On demande des formules logiques, il est crucial que la syntaxe soit strictement respectée, en particulier les parenthèses. Par ailleurs, il est très utile d'accompagner la formule logique d'une paraphrase qui évite l'ambiguïté de la phrase initiale.

(2) a. Tous les artistes préfèrent un livre.
b. S'il faut que personne ne chante pour que Paul soit content, alors il y a quelqu'un qui chante.
c. Tout le monde cherche quelque chose, mais tout le monde ne le trouve pas.
d. Aucun journaliste n'a interrogé tous les témoins d'un accident.

(2-a) Cette phrase présente une ambiguïté ultra classique : soit les artistes ont chacun.e un livre préféré, qui n'est pas forcément la même (interprétation la plus proche de la structure syntaxique de la phrase, puisqu'alors le quantificateur universel a portée sur le quantificateur existentiel introduit par l'indéfini objet) (a) ; soit il y a un livre que toustes les artistes préfèrent (interprétation où l'indéfini en position d'objet vient prendre portée sur le sujet de la phrase) (b). [1]

(a) $\forall x(Ax \to \exists y(Ly \land Pxy))$

(b) $\exists y(Ly \land \forall x(Ax \to Pxy))$

(2-b) Dans cette phrase, il y a plusieurs propositions quantifiées qui sont indépendantes (pas d'interférence de portée). On peut donc déterminer leur représentation séparément :

Personne ne chante	$\forall x(Px \to \neg Cx)$ ou $\neg\exists x(Px \land Cx)$
Paul est content	Hp
Il y a quelqu'un qui chante	$\exists x(Px \land Cx)$

Quant à la structure générale de la formule, elle comprend deux conditionnelles enchâssées, l'une exprimée avec *si φ alors ψ*, qu'on représente naturellement $\varphi \to \psi$, l'autre exprimée avec *il faut α pour que β*. Dans ce dernier cas, c'est la formule $\beta \to \alpha$ qu'il faut choisir, puisque la phrase exprime une relation *nécessaire* (puisqu'il faut α pour β, alors dès qu'on a β, c'est qu'on a α), mais pas (nécessairement) suffisante (autrement dit, ce n'est pas parce qu'on a α qu'on a β). Si on met tout cela ensemble, cela donne :

$$\Big(\big(Hp \to \forall x(Px \to \neg Cx)\big) \to \exists y(Py \land Cy)\Big)$$

1. On pouvait tenter de traduire *préférer* par une relation ternaire $P' =$ « *aimer plus que* », de sorte que la sous-formule Pxy pourrait être remplacée par $\forall z(I(z) \to P'xyz)$. Mais cette façon d'expliciter la sémantique lexicale n'était pas demandée, entre autres parce qu'elle pose des difficultés : il faut choisir si dans cette phrase l'infirmière est préférée à toutes les infirmières (choix fait dans la proposition précédente), ou à toutes les femmes, ou à toutes les choses... Une telle information n'est pas explicitement présente dans la phrase.

(2-c) Le sémanticien pervers peut trouver deux sources d'ambiguïté dans cette phrase : d'une part la portée respective des deux SN quantifiés de la première proposition, d'autre part l'interprétation de l'interaction entre l'universel et la négation dans la seconde proposition. Cela fait sur le papier 4 interprétations, qui ne sont pas toutes également accessibles aux locuteurs, et qui par ailleurs posent dans certains cas des problèmes techniques (du type *donkey sentence*). Voici quelques réponses possibles, dans l'ordre de leur plausibilité (selon mon jugement).

Pour toute personne, il y a une chose qu'elle cherche, et il y a des personnes qui ne trouvent pas (au moins) une chose qu'elles cherchent

$$\forall x(Px \to \exists y(Cy \land Rxy)) \ \land \ \exists x(Px \land \exists y(Cy \land Rxy \land \neg Txy))$$

Il y a une chose (par exemple le bonheur) que tout le monde cherche, et que tout le monde ne trouve pas (= et que pas tout le monde trouve)

$$\exists x(Cx \land \forall y(Py \to Ryx) \land \neg\forall y(Py \to Tyx))$$

Pour toute personne, il y a une chose qu'elle cherche sans la trouver

$$\forall x(Px \to \exists y(Cy \land Ryx \land \neg Tyx))$$

Il y a une chose que tout le monde cherche et que personne ne trouve

$$\exists x(Cx \land \forall y(Py \to Ryx) \land \forall z(Pz \to \neg T(zx)))$$

(2-d) Deux lectures possibles selon la portée étroite ou large de l'indéfini *un accident.*

$$\exists x(Ax \land \forall y(Tyx \to \neg\forall z(Jz \to Izy)))$$

$$\neg\exists z(Jz \land \forall x(Ax \to \forall y(Tyx \to Izy)))$$

Exercice 2

Proposer, pour chacune des phrases suivantes, une « traduction » en logique des prédicats, en explicitant les éventuels cas d'ambiguïté.

(3)
a. Paul ira au cinéma à condition qu'il ne soit pas malade.
b. Jean n'a pas perdu un seul cheveu.
c. Tout le monde reconnaît un acteur.
d. Jean cherche à rencontrer un acteur.
e. Chaque étudiant, s'il fait un stage, doit le faire valider par tous les professeurs.
f. Tout le monde cherche quelque chose que tout le monde ne trouve pas.

. . . . Corrigé . . . .

(4)
a. Paul ira au cinéma à condition qu'il ne soit pas malade.
$C(p) \leftrightarrow \neg M(p)$
b. Jean n'a pas perdu un seul cheveu.
$\neg\exists x(C(x) \wedge P(j,x))$
c. Tout le monde reconnaît un acteur.
$\forall x\exists y(P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$
$\exists y\forall x(P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$
$\forall x\forall y(P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x,y)$
d. Jean cherche à rencontrer un acteur.
$\exists y(A(y) \wedge CR(j,y))$
$\forall y(A(y) \rightarrow CR(j,y))$
e. Chaque étudiant, s'il fait un stage, doit le faire valider par tous les professeurs.
$\forall x(E(x) \rightarrow (\exists y(S(y) \wedge F(x,y)) \rightarrow \forall z(P(z) \rightarrow V(z,y))))$
f. Tout le monde cherche quelque chose que tout le monde ne trouve pas.
$\exists x(C(x) \wedge \neg\forall y(P(y) \rightarrow T(y,x)) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow C(z,x)))$
$\forall z\exists x((P(z) \wedge C(x) \wedge \neg\forall y(P(y) \rightarrow T(y,x))) \rightarrow C(z,x))$