Exercice 1

Traduire les prémisses et la conclusion du syllogisme suivant en formules de logique des propositions. Ce syllogisme est-il valide ?

Quand le professeur est absent ou malade, les étudiants se réjouissent
Le professeur est malade
Les étudiants se réjouissent.

. . . . Corrigé . . . .

Quand le professeur est absent ou malade, les étudiants se réjouissent	$((A \vee M) \rightarrow J)$
Le professeur est malade	M
Les étudiants se réjouissent	J

Ce syllogisme est valide, et pour le montrer on peut calculer la table de vérité composite.

A	M	J	$(A \vee M)$	$\overbrace{((A \vee M) \rightarrow J)}^{\varphi}$	prémisses $(\varphi \wedge M)$	concl. J	$((\varphi \wedge M) \rightarrow J)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Il est bien sûr important que la table de vérité soit complète (le bon nombre de lignes et de colonnes), et juste ; mais il est encore plus important de **lire** la table de vérité pour démontrer le résultat : dans le cas qui nous occupe, on peut dire, indifférement :

- Dans toutes les situations où les prémisses sont vraies (en jaune dans la table), la conclusion est vraie (en bleu), par conséquent le syllogisme est valide ;
- La formule $(\alpha \rightarrow \omega)$ (où α représente les prémisses et ω la conclusion) est une tautologie (en vert dans la table). Par conséquent le syllogisme est valide.

Exercice 2

Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnements corrects ?

(1)
a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.
b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.
c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.
d. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.
e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.

. . . . Corrigé . . . .

(2) a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.
Choisissons P pour représenter la proposition *Pierre a menti* et J pour *Jean est coupable*. La première prémisse est $(P \to J)$; la seconde est $\neg J$; leur conjonction est $((P \to J) \wedge \neg J)$. Dans une table de vérité comprenant une colonne pour la conjonction des prémisses et une colonne pour la conclusion, on peut voir que *dans toutes les situations où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi*. Le discours est donc valide.
Le type d'inférence illustré par ce discours est appelé *modus tollendo tollens*, ou plus simplement *modus tollens*.

b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.
Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question (2-a). La première prémisse est $(P \to J)$; la seconde est $\neg P$; leur conjonction est $((P \to J) \wedge \neg P)$. Dans la table de vérité, on trouve une ligne où la conjonction des prémisses est vraie et la conclusion fausse. Le discours n'est donc pas valide.
Ce type de raisonnement fallacieux est assez répandu dans la vie quotidienne. On peut considérer qu'il s'agit d'une faute logique, mais on peut aussi considérer que l'erreur vient d'une mauvaise interprétation de *si* : il arrive fréquemment qu'en entendant *B si A* on comprenne *B si et seulement si A*, et cette "interprétation renforcée" est considérée par certains linguistes comme une *implicature* : une inférence qui n'est pas nécessairement logiquement valide, mais que l'on fait dans certains contextes, sur la base de principes généraux de communication.

c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.
Attribuons les lettres suivantes à chaque proposition simple :
—P : *Pierre se présente*
—J : *Jean démisionne*
—A : *Albert se présente*
—E : *Albert est élu*
—R : *Pierre est élu*
Les prémisses sont :
—$(P \to J)$
—$(J \to A)$
—$(A \to E)$
—$(E \to \neg R)$
—$(\neg P \to \neg R)$
Il faut donc déterminer si on a une relation de conséquence logique entre la conjonction de ces prémisses et la conclusion $(\neg R)$. Cela peut se faire en calculant la table de vérité, ce qui est possible mais fastidieux, puisqu'elle contient $2^5 = 32$ lignes. On peut aussi exploiter une propriété facile à démontrer dans le cas général : $(A \to B) \wedge (B \to C)$ a pour conséquence logique $A \to C$. Si on applique cette propriété aux prémisses en présence, on peut conclure que quand les prémisses sont vraies, alors la conjonction $(P \to \neg R) \wedge (\neg P \to \neg R)$ est vraie. Or on peut facilement établir avec une table de vérité à 4 lignes que si cette dernière conjonction est vraie, alors $\neg R$

est vraie. $\neg R$ est donc une conséquence logique de cette dernière conjonction, qui est elle-même une conséquence logique de la conjonction initiale : le syllogisme est valide.

d. Si Horace aime Juliette (H), elle l'épousera (J). Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf (G). Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.
La conjonction des prémisses est $(H \to J) \wedge (\neg H \to G) \wedge \neg J$ et la conclusion G. L'inférence est valide. En effet, dans l'unique situation où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi (cette situation est celle où $H = 0$, $J = 0$ et $G = 1$).

e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.
Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question précédente. La conjonction des prémisses est $(H \to J) \wedge (\neg H \to G) \wedge G$ et la conclusion $\neg J$. La table de vérité complète est la suivante :

H	J	G	$H \to J$	$\neg H \to G$	$\neg J$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Dans cette table, il y a trois situations où les trois prémisses sont vraies (en vert), et on observe que dans deux d'entre elles, la conclusion n'est pas vraie. On peut donc en conclure que le syllogisme n'est pas valide.

Exercice 3

Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

(1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
(2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
(3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
(4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que jean a réussi son examen

. . . . Corrigé . . . .

1. Traduction en logique. Les propositions élémentaires sont :

— M : *Marie est contente*

— J : *Jean a réussi son examen*

Traduction des phrases en logique des propositions :

1. $(J \wedge \neg M)$
2. $\neg M$
3. $(J \rightarrow M)$
4. $(M \vee \neg J)$

On cherche à démontrer que :

— (1) $\rightarrow$ (2), soit $((J \wedge \neg M) \rightarrow \neg M)$

— (3) $\leftrightarrow$ (4) soit $((J \rightarrow M) \leftrightarrow (M \vee \neg J))$

2. Table de vérité

J	M	$\neg M$	$\neg J$	$(J \wedge \neg M)$	$(J \rightarrow M)$	$(M \vee \neg J))$	$((J \wedge \neg M) \rightarrow \neg M)$	$((J \rightarrow M) \leftrightarrow (M \vee \neg J))$
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1

Lecture de la table : Les deux dernières colonnes sont toujours vraies, soit (1) implique logiquement (2) et (3) et (4) sont logiquement équivalents.

Exercice 4

Traduire les phrases suivante en logique des prédicats.

(3) a. Pour qu'une solution soit mise en œuvre, il faut que tous les intervenants l'approuvent.
b. Les gens qui aiment tout le monde sauf eux-mêmes sont altruistes.
c. Quelle que soit la pomme que Léa choisit, elle la mange.
d. Tout est soit doux soit amer.

. . . . Corrigé . . . .

(4) a. Pour qu'une solution soit mise en œuvre, il faut que tous les intervenants l'approuvent
$\forall y\ (Sy \rightarrow (My \rightarrow \forall x\ (Ix \rightarrow Axy)))$

b. Les gens qui aiment tout le monde sauf eux-mêmes sont altruistes
$\forall x\ ((Px \wedge \neg Lxx \wedge \forall y\ ((Py \wedge y \neq x) \rightarrow Lxy)) \rightarrow Ax)$
Variante possible en enlevant $\neg Lxx$ si on interprète *sauf* comme *sauf peut-être*
Attention : la forme prenexe suivante est correcte :
$\forall x \forall y\ ((Px \wedge \neg Lxx \wedge ((Py \wedge y \neq x) \rightarrow Lxy)) \rightarrow Ax)$
Mais pas celle-ci :
$\forall x \forall y\ ((Px \wedge \neg Lxx \wedge ((Py \wedge y \neq x) \wedge Lxy)) \rightarrow Ax)$
Qui est équivalente à :
$\forall x\ ((Px \wedge \neg Lxx \wedge \exists y((Py \wedge y \neq x) \wedge Lxy)) \rightarrow Ax)$

c. Quelle que soit la pomme que Léa choisit, elle la mange
$\forall x\ ((Px \wedge Clx) \rightarrow Mlx)$

d. Tout est soit doux soit amer
$\forall x(Dx \vee Ax)$

Exercice 5

Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

(5) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.
b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.
c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.

. . . . Corrigé . . . .

• Phrase (a) :
Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

$$\text{Quand quelqu'un } \overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui } \underbrace{\text{a trompé tout le monde}}_{\Psi}}^{\Phi}\text{, il a tort}$$

— Premier niveau : *Quand quelqu'un* Φ*, il a tort*
— l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x\ ((Px \wedge \Phi x) \rightarrow Tx)$$

— Deuxième niveau : Φx = *x fait confiance à quelqu'un qui* Ψ
— ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y\ ((Py \wedge \Psi y) \wedge C(x, y))$$
$$\forall y\ ((Py \wedge \Psi y) \rightarrow C(x, y))$$

— Troisième niveau : $\Psi y = y$ a trompé tout le monde

$$\forall z\ (Pz \rightarrow Tr(y, z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x\ \Big(\big(Px \wedge \exists y\ \big((Py \wedge \forall z\ (Pz \rightarrow Tr\,(y, z))) \wedge C(x, y)\big)\big) \rightarrow Tx\Big)$$

- Phrase (b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)

$$\neg\exists x\ (GCx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge CT(x,y)))$$
$$\neg\exists x\ (GCx \wedge \forall y\ (Py \rightarrow \neg CT(x,y)))$$

- Phrase (c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)

$$\forall x\ (Px \rightarrow (Ox \vee Fx))$$

/