Exercice 1

Pour les deux phrases suivantes, proposer une phrase contradictoire, et une phrase contraire (non contradictoire).

(1) a. Max est en retard et Marie est en avance
b. Max est en retard ou Marie est en avance

Corrigé

(1a) Max est en retard et Marie est en avance

Contradictoire Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons)

(2) a. Il est faux que Max est en retard et Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{\textit{ou}}$ Marie n'est pas en avance

Contraire De nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les même propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles.[1]

(3) a. Max n'est pas en retard et Marie n'est pas en avance
b. ≠ Max est en retard et Marie n'est pas en avance
c. ≠ Max est à l'heure
d. ≠ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

(1b) Max est en retard ou Marie est en avance

Contradictoire Une seule proposition contradictoire (exprimée de plusieurs façons)

(4) a. Il est faux que Max est en retard ou Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{\textit{et}}$ Marie n'est pas en avance
c. = Max n'est pas en retard, ni Marie en avance

Contraire De nouveau plusieurs possibilités (et certaines sont aussi contraires à (1a))

(5) a. Max est à l'heure et Marie est à l'heure
b. ≠ Max est en retard et il n'est pas en retard[2]
c. ≠ Max est en avance et Marie est en retard
d. ≠ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

1. On admettra que *ne pas être en retard* n'est pas équivalent à *être en avance* : on peut aussi *être à l'heure*.
2. Cette proposition est toujours fausse, donc en particulier elle ne peut pas être vraie quand (1b) l'est...

Exercice 2

1. Proposer une phrase contraire à la phrase (6).
2. Proposer une phrase contradictoire à la phrase (6), si possible naturelle.
3. Après avoir traduit la phrase (6) en logique des propositions, justifiez vos propositions grâce à une table de vérité.

(6) Ce paresseux de Jean dort encore.

. . . . Corrigé . . . .

1. **Contradictoire** : Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons)

   (7) a. Il est faux de dire que ce paresseux de Jean dort encore.
   b. = Jean n'est pas paresseux ou ne dort plus.

2. **Contraire** : Il y a de nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les même propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles.

   (8) a. Jean n'est pas paresseux et il ne dort plus.
   b. ≠ Jean est paresseux et il ne dort plus.
   c. ≠ Jean est travailleur.
   d. ≠ Jean est travailleur et il est réveillé.
   e. . . .

3. **Table de vérité** : La phrase (6) peut être traduite ainsi : $(P \wedge J)$, avec P = Jean est paresseux et J = Jean dort encore. La phrase (7-b) se traduit alors $(\neg P \vee \neg J)$. La phrase (8-a) peut se traduire $(\neg P \wedge \neg J)$. La table de vérité suivante permet de vérifier que les valeurs de vérité de (6) et de (7-b) sont opposées dans tous les cas, et que les colonnes des formules (6) et de (8-a) montrent que ces formules ne sont jamais vraies en même temps, mais peuvent être fausses en même temps.

P	J	$(P \wedge J)$ **??**	$(\neg P \vee \neg J)$ **??**	$(\neg P \wedge \neg J)$ **??**
0	0	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Exercice 3

Les deux formules suivantes sont-elles contraires, contradictoires ? Justifiez votre réponse au moyen d'une table de vérité.

(9) a. $((\neg P \to Q) \leftrightarrow P)$
b. $(\neg P \wedge \neg Q)$

.... Corrigé ....

Les deux formules peuvent toutes deux être vraies en même temps (quand $P = 0$ et $Q = 0$), elles ne sont donc ni contraires ni contradictoires.
En toute rigueur, ceci suffit à justifier la réponse, mais on demandait explicitement une table de vérité, la voici (il faut évidemment mettre les deux formules dans la **même** table de vérité).

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \to Q)$	$((\neg P \to Q) \leftrightarrow Q)$	$(\neg P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0

Lecture de la table : dans la première ligne, on observe que les deux formules sont vraies en même temps. Même si c'est le seul cas de ce genre, cela suffit à conduire à la conclusion que les deux formules ne sont ni contraires ni contradictoires.

Exercice 4

A l'exercice 4 de la feuille n°1, nous avons vu que la phrase *Luce est en retard et si Annie est là, alors on va pouvoir ouvrir la porte* pouvait se représenter en logique des propositions par $(L \wedge (A \to P))$. Cette formule est-elle équivalente à $((L \wedge A) \to P)$, où seule la position des parenthèses a été modifiée ? Justifiez votre réponse à l'aide d'une table de vérité.

.... Corrigé ....

Dans la table de vérité ci-dessous, on peut voir que les formules $(L \wedge (A \to P))$ et $((L \wedge A) \to P)$ n'ont pas les mêmes valeurs de vérité aux lignes 1 à 4 (voir les cellules grisées). Ces formules ne sont donc pas équivalentes.

L	A	P	$(A \to P)$	$(L \wedge (A \to P))$	$(L \wedge A)$	$((L \wedge A) \to P)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Exercice 5

Montrer que, quelles que soient φ et ψ, les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes :

(i)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
(ii)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
(iii)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$

.... Corrigé ....

(i)

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$(\psi \rightarrow \varphi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Les colonnes correspondant aux deux formules considérées sont identiques, ces formules sont donc logiquement équivalentes.

(ii)

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

Les colonnes correspondant aux deux formules considérées sont identiques, ces formules sont donc logiquement équivalentes.

(iii)

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Les colonnes correspondant aux deux formules considérées sont identiques, ces formules sont donc logiquement équivalentes.