Exercice 1

Calculer les valeurs de vérité des formules suivantes :

(1) a. $((P \leftrightarrow R) \vee R)$
b. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$
c. $((\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(Q \vee P))$

Corrigé

P	R	$(P \leftrightarrow R)$	$((P \leftrightarrow R) \vee R)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow P)$	$((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \wedge \neg Q)$ φ	$(Q \vee P)$	$\neg(Q \vee P)$ ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1

Exercice 2

Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées.

(2) a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
d. Il est faux que si Marie se repose et Léa lit le journal, Jean fait la vaisselle.

Situations :
1. Jean fait la vaisselle, Marie se repose, Léa lit le journal.
2. Jean ne fait pas la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa lit le journal.
3. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

.... Corrigé ....

Pour répondre à la question il faut d'abord proposer une représentation en logique des propositions de chaque phrase (ce qui conduit dans certains cas à expliciter les éventuelles ambiguïtés). On propose : $L =$ "Léa lit le journal", $J =$ "Jean fait la vaisselle", et $M =$ "Marie se repose".

a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
La conjonction *parce que* apporte une relation causale qui ne peut être formalisée en logique des propositions, il ne reste donc que les conditions de vérité : on peut dire que "A parce que B" ne peut être vraie que si A et B sont vraies. D'où la proposition $(J \wedge (M \wedge L))$ — qui est logiquement équivalente à la formule $((J \wedge M) \wedge L)$, ce qui explique qu'on s'autorise quelque fois à l'écrire tout simplement $(J \wedge M \wedge L)$.

b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
Il y a une ambiguïté syntaxique dans cette phrase, qui peut être analysée soit comme la conjonction d'une conditionnelle et d'une phrase simple — la formule est alors $((M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J)$, soit comme une conditionnelle dont la principale est une conjonction — formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$.

c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
La phrase est une disjonction, on peut donc proposer la formule $((J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L))$. La question de la "traduction" de *soit... soit* est une question délicate, et on pourrait être tenté de proposer ici un "ou exclusif" plutôt que la version inclusive présentée. On s'abstiendra cependant de le faire, en s'appuyant sur la thèse dominante en sémantique/pragmatique (voir par exemple Levinson) selon laquelle la signification de la disjonction en langue naturelle est inclusive, et qu'elle fait l'objet, dans les contextes appropriés, d'un « renforcement pragmatique » qui conduit à une lecture exclusive.

d. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.
Cette phrase comporte une négation qui prend sans ambiguïté dans sa portée le reste de la phrase, on peut donc proposer la formule $\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$.

Pour le calcul et la réponse à la question, on pouvait soit remplir une table de vérité pour chacune des formules envisagées, en ne faisant figurer dans la table que la situation considérée (voir ci-dessous), soit faire le calcul de manière explicite pour chaque situation. Par exemple, la formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$ vaut, dans la situation n°2, $(0 \rightarrow (\neg 1 \wedge \neg 0))$, ce qui est égal à $(0 \rightarrow (0 \wedge 1))$, et donc à $(0 \rightarrow 0)$, et donc à 1. La phrase b, sous cette analyse, est donc vraie dans la situation 2.

La table suivante donne la valeur de toutes les formules envisagées dans les 3 situations, sans faire figurer les calculs intermédiaires. La paire de parenthèses externes est omise (le cas échéant).

	J	M	L	$J \wedge M \wedge L$ (a)	$(M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J$ $(b1)$	$M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J)$ $(b2)$	$(J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L)$ (c)	$\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$ (d)
sit. 1	1	1	1	1	0	0	1	0
sit. 2	0	0	1	0	1	1	1	0
sit. 3	1	0	0	0	0	1	0	0

Exercice 3

Alain, Benoît et Claude sont soupçonnés de fraude fiscale. Ils fournissent les témoignages suivants :

Alain :	Benoît est coupable et Claude est innocent.
Benoît :	Si Alain est coupable, Claude l'est aussi.
Claude :	Je suis innocent mais l'un des deux autres au moins est coupable.

Exprimez le témoignage de chacun des suspects en logique des propositions.
Répondez aux questions suivantes, en vous appuyant sur une table de vérité :

1. Est-il possible que les trois témoignages soient vrais en même temps ?
2. Si tous les suspects sont innocents, est-ce que quelqu'un ment, et si oui, qui ?
3. Si les coupables mentent et que les innocents disent la vérité, qui est innocent et qui est coupable ?

.... Corrigé ....

Soient les conventions suivantes :

A Alain est innocent
B Benoît est innocent
C Claude est innocent

On peut proposer :

Alain	Benoît est coupable et Claude est innocent.	$(\neg B \wedge C)$	α
Benoît	Si Alain est coupable, Claude l'est aussi.	$(\neg A \rightarrow \neg C)$	β
Claude	Je suis innocent mais l'un des deux autres est coupable.	$(C \wedge (\neg A \vee \neg B))$	γ

A	B	C	α	β	γ
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

1. Est-il possible que les trois témoignages soient vrais en même temps ?

   Les trois témoignages sont vrais en même temps dans un seul cas (marqué en jaune) : quand A et C sont vrais, et B fausse, c'est-à-dire quand Alain et Claude sont innocents, et Benoît coupable.

2. Si tous les suspects sont innocents, est-ce que quelqu'un ment, et si oui, qui ?

   Si tous sont innocents, les variables A, B et C sont vraies (marqué en vert). Alors Alain et Claude mentent, et Benoît dit vrai.

3. Si les coupables mentent et que les innocents disent la vérité, qui est innocent et qui est coupable ?

   Si tous les coupables mentent et tous les innocents disent la vérité, la valeur de la colonne A doit être la même que la colonne du témoignage de Alain (α) (idem pour les deux autres cas). La seule configuration de ce type est marquée en rouge : c'est quand Benoît est innocent (et dit donc vrai), et Alain et Claude sont coupables (et par conséquent mentent).

Exercice 4

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

(1)	$\neg(\neg P \vee Q)$	(5)	$(P \to ((P \to Q)))$	(9)	$(P \vee (Q \vee R))$
(2)	$P \vee (Q)$	(6)	$((P \to P) \to (Q \to Q))$	(10)	$-P \vee Q \vee R$
(3)	$\neg(Q)$	(7)	$((P_{28} \to P_3) \to P_4)$	(11)	$(\neg P \vee \neg\neg P)$
(4)	$(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$	(8)	$(P \to (P \to Q) \to Q)$	(12)	$(P \vee P)$

Corrigé

(1)	$\neg(\neg P \vee Q)$	OUI	(5)	$(P \to ((P \to Q)))$	NON	(9)	$(P \vee (Q \vee R))$	OUI
(2)	$P \vee (Q)$	NON	(6)	$((P \to P) \to (Q \to Q))$	OUI	(10)	$-P \vee Q \vee R$	NON
(3)	$\neg(Q)$	NON	(7)	$((P_{28} \to P_3) \to P_4)$	OUI	(11)	$(\neg P \vee \neg\neg P)$	OUI
(4)	$(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$	OUI	(8)	$(P \to (P \to Q) \to Q)$	NON	(12)	$(P \vee P)$	OUI

N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèses la plus externe mais en toute rigueur, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

De même, pour les connecteurs associatifs (comme $\wedge$ et $\vee$), il arrive qu'on néglige d'autres parenthèses lorsque la position des parenthèses absentes n'a pas d'incidence sur la valeur de la formule. Par exemple on écrira $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, car les deux paires parenthèses manquantes peuvent être placées de n'importe quelle manière syntaxiquement correcte sans conséquence.