Memento Sémantique Formelle

Syntaxe

Vocabulaire de L_p

Soit L_p le langage de la logique des propositions. Le vocabulaire de L_p est constitué de :

1. Un ensemble de symboles de proposition : $P, Q, R, ...$
2. Connecteur unaire : $\neg$
3. Connecteurs binaires : $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
4. Parenthèses : (,)

Formules bien formées de L_p

Les formules bien formées s'obtiennent en suivant ces règles :

1. Tous les symboles de propositions sont des formules de L_p (éléments atomiques).
2. Si ϕ est une formule de L_p, alors $\neg\phi$ est une formule de L_p.
3. Si ϕ et ψ sont des formules de L_p, alors :
   - $(\phi \wedge \psi)$ ET
   - $(\phi \vee \psi)$ OU (inclusif)
   - $(\phi \rightarrow \psi)$ Implication matérielle
   - $(\phi \leftrightarrow \psi)$ Équivalence matérielle

   sont des formules de L_p.
4. Rien d'autre n'est une formule : seules sont des formules les expressions qui peuvent être générées par les règles 1, 2 et 3 ci-dessus en un nombre fini d'étapes.

Petit "dictionnaire" pratique

Dans les exemples qui suivent, on a posé :

P : "J'ai trop mangé" et Q : "J'ai envie de dormir"

Langage naturel	L_p	Exemple
Si $\underline{\cdots}$ alors $\boxed{\cdots}$	$\underline{P} \rightarrow \boxed{Q}$	Si $\underline{\text{j'ai trop mangé}}$ alors $\boxed{\text{j'ai envie de dormir}}$
$\boxed{\cdots}$ quand $\underline{\cdots}$	$\underline{P} \rightarrow \boxed{Q}$	$\boxed{\text{J'ai envie de dormir}}$ quand $\underline{\text{j'ai trop mangé}}$
Il suffit de/que $\underline{\cdots}$ pour $\boxed{\cdots}$	$\underline{P} \rightarrow \boxed{Q}$	Il suffit que $\underline{\text{j'aie trop mangé}}$ pour que $\boxed{\text{j'aie envie de dormir}}$
$\underline{\cdots}$ que si $\boxed{\cdots}$	$\underline{P} \rightarrow \boxed{Q}$	$\underline{\text{Je n'ai trop mangé}}$ que si $\boxed{\text{j'ai envie de dormir}}$
Ni $\underline{\cdots}$ ni $\boxed{\cdots}$	$(\neg \underline{P} \wedge \neg \boxed{Q})$	Je n'ai ni $\underline{\text{trop mangé}}$ ni $\boxed{\text{envie de dormir}}$
Il est faux que $\underline{\cdots}$	$\neg \underline{P}$	Il est faux que $\underline{\text{j'ai trop mangé}}$

Table 1: Exemples (liste non exhaustive) de formulations utilisées en français et leur traduction dans L_p

Sémantique

Négation

P	$\neg P$
0	1
1	0

ET

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OU (inclusif)

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implication matérielle

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Équivalence matérielle

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 2: Tables de vérité des connecteurs

Les tables de vérité composites permettent de calculer le sens de toute formule complexe à partir du sens des constituants plus simples. Pour les obtenir, on écrit une colonne par sous-formule, en remontant l'arbre de décomposition. Le nombre de lignes de la table composite dépend du nombre de symboles de propositions distincts dans la formule : avec k symboles, il y a 2^k lignes.

