Corrigé – Partiel Sémantique Formelle

Sujet A

Exercice 1

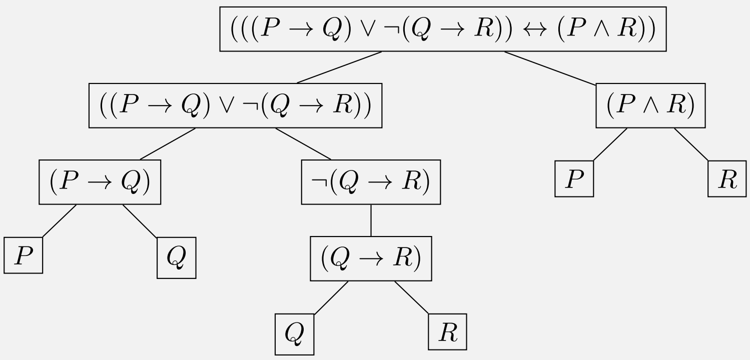
1. L'expression $((P \to Q) \vee \neg(Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge R))$ est-elle une formule bien formée de L_p ?

   Si oui, donner son arbre de décomposition. Si non, la compléter pour qu'elle soit bien formée (en mettant en évidence les ajouts) et donner l'arbre de composition correspondant.

2. Quels sont les éléments atomiques de cette formule ?

1. Il manque une parenthèse. En la rajoutant, on obtient :

$$(((P \to Q) \vee \neg(Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge R))$$



2. Les éléments atomiques de cette formule sont les propositions P, Q et R.

Exercice 2

Traduire les phrases suivantes dans le langage des propositions L_p.

1. Si Liv est étudiant·e ou salarié·e à temps partiel, iel ne paie pas d'impôts.
2. J'attrape un rhume quand il fait trop froid et que je n'ai pas d'écharpe.
3. Il ne suffit pas de se présenter à l'examen pour avoir une bonne note.
4. Les végétarien·nes ne mangent ni viande ni poisson.
5. Il est faux que Cléa ne viendra que si Emma ne vient pas.

1. On pose les propositions suivantes :
   E : Liv est étudiant·e
   S : Liv est salarié·e
   I : Liv paie des impôts
   On a alors la traduction : $((E \vee S) \rightarrow \neg I)$
2. On pose les propositions suivantes :
   R : J'attrape un rhume
   F : Il fait trop froid
   E : J'ai une écharpe
   On a alors la traduction : $((F \wedge \neg E) \rightarrow R)$
3. On pose les propositions suivantes :
   E : Je me présente à l'examen
   N : J'ai une bonne note
   On a alors la traduction : $\neg(E \rightarrow N)$
4. On pose les propositions suivantes :
   V : Les végétarien·nes mangent de la viande
   P : Les végétarien·nes mangent du poisson
   On a alors la traduction : $(\neg V \wedge \neg P)$
5. On pose les propositions suivantes :
   C : Cléa vient
   P : Emma vient
   On a alors la traduction : $\neg(C \rightarrow \neg E)$

Exercice 3

Donner les tables de vérité des formules suivantes :

1. $((P \wedge R) \rightarrow Q)$
2. $(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \wedge R)$	$((P \wedge R) \rightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q)$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee R)$
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

Exercice 4

1. Proposer une phrase contradictoire à la phrase (a).
2. Après avoir traduit la phrase (a) en logique des propositions, proposer une phrase contraire à la phrase (a) (différente de celle donnée dans la question d'avant), dans L_p puis en langage naturel. Justifier la proposition grâce à une table de vérité.

   (a) Cet hédoniste de Jack est encore en terrasse.

1. Il est faux que cet hédoniste de Jack est encore en terrasse.
2. On pose les propositions suivantes :

   H : Jack est hédoniste

   J : Jack est encore en terrasse

   On a alors la traduction $H \wedge T$.

   On rappelle que deux propositions sont contraires si elles ne peuvent pas être vraies en même temps (mais elles peuvent être fausses en même temps. Cela implique les valeurs de vérité en rouge dans le tableau, où l'on a représenté différents cas possibles.

H	T	$(H \wedge T)$	$(H \wedge \neg H)$	$(\neg H \vee \neg T)$	$(\neg H \wedge \neg T)$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Exercice 5

Calculer la valeur de vérité de la phrase suivante dans chacune des situations proposées.

(a) Soit il fait beau et je lis dans le parc, soit il ne fait pas beau et je suis au café.

Situations :

1. Il fait beau, je lis dans le parc, je suis au café.
2. Il ne fait pas beau, je lis dans le parc, je ne suis pas au café
3. Il fait beau, je ne lis pas dans le parc, je ne suis pas au café.

On pose les propositions suivantes :
B : Il fait beau
L : Je lis dans le parc
C : Je suis au café
On peut alors traduire (a) dans L_p par $((B \wedge L) \vee (\neg B \wedge C))$.
Pour obtenir la valeur de vérité de (a) dans les différentes situations, on dresse un tableau de vérité où chaque ligne correspond à une situation.

Situation	B	L	C	$(B \wedge L)$	$\neg B$	$(\neg B \wedge C)$	$((B \wedge L) \vee (\neg B \wedge C))$
1	1	1	1	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0

BONUS : Exercice 6

En s'aidant d'une table de vérité, proposer une formule logiquement équivalente à $(\neg P \wedge Q)$.
Indice : Chercher la formule logiquement équivalente sous la forme $\neg\phi$, où ϕ est une formule de L_p à déterminer.

On écrit d'abord la table de vérité de notre formule $(\neg P \wedge Q)$.
On écrit ensuite que cela doit correspondre à $\neg\phi$: on a donc les mêmes valeurs de vérité dans cette colonne.
On en déduit les valeurs de vérité de ϕ.
On reconnaît la table typique d'un $\vee$ qui est fausse lorsque P est fausse et Q vraie, autrement dit lorsque P est fausse et $\neg Q$ est fausse. On a donc une équivalence logique entre ϕ et $(P \vee \neg Q)$.
On obtient finalement que $(\neg P \wedge Q)$ est logiquement équivalente à $\neg(P \vee \neg Q)$ (ce que l'on vérifie dans la dernière colonne de la table).

P	Q	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$\neg\phi$	ϕ	$(P \vee \neg Q)$	$\neg(P \vee \neg Q)$
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0