Logique des prédicats : formules atomiques

1. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

   (1) a. Charles est beau, mais pas Elsa
   b. Jean est plus beau que Pierre
   c. Marion est une femme heureuse
   d. Jean et Pierre sont de bons amis
   e. Pierre est allé à Toulouse avec Charles sur le vélo neuf de Marie
   f. Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles

2. Les phrases suivantes sont ambigües. Expliquer l'ambiguïté, et proposer, *quand c'est possible*, les deux représentations en logique des prédicats que l'on peut associer à ces phrases.

   (2) a. J'ai aperçu Marie avec un téléscope
   b. Le boucher sale la tranche
   c. Voler n'est pas bien difficile
   d. Léa ne croit pas que Marie mente

   (3) a. Jean loue un appartement.
   b. Tout étudiant lit un article.
   c. Marie aime les chiens et les chats sauvages.
   d. Tout le monde n'a pas aimé le film.
   e. Paul devrait être à New York.

3. Proposer (au moins) une phrase en français qui a les mêmes conditions de vérité que chacune des formules suivantes, où $F(x) = x$ est fermier, $P(x,y) = x$ possède y, $B(x,y) = x$ bat y, $j =$ Jean, $c =$ Chikita, $A(x) = x$ est un âne.

   (4) a. $F(j) \rightarrow (P(j,c) \wedge A(c))$
   b. $\forall x \forall y (F(x) \wedge P(x,y)) \rightarrow B(x,y)$

   En décomposant la formule 4a en sous-formules (sous forme d'une arbre), calculer la valeur de vérité de la formule si Chikita n'est pas un âne.

4. Traduisez les énoncés suivants en formules de la logique des prédicats (on donnera à chaque fois l'interprétation des prédicats utilisés — par exemple A(x,y) = x aime y). En cas d'énoncé ambigu, on proposera deux formules.

   (5) a. Un chat est entré
   b. Certains enfants ne sont pas malades
   c. Tous les éléphants ont une trompe
   d. Tous les hommes n'aiment pas Marie
   e. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante
   f. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente
   g. Tous les fermiers apprécient un ministre

5. Montrez que les formules de chacune des paires ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes, en donnant l'exemple d'une situation où l'une est vraie et pas l'autre.

   (6) a. $\forall x(A \vee B)$ *vs.* $(\forall x A \vee \forall x B)$
   b. $\exists x(A \wedge B)$ *vs.* $(\exists x A \wedge \exists x B)$