

Exercice 1 [10 points]

Donner une représentation en logique des prédicats des phrases suivantes. Bien préciser le vocabulaire utilisé et quand une phrase est ambiguë, proposer une représentation pour chaque interprétation possible.

- (1) a. Pierre aime tous les fromages.

$$\forall x (Fx \rightarrow Apx)$$

- b. Il y a des fromages célèbres que tout le monde n'aime pas.

Deux interprétations :

- (1) Il y a des fromages célèbres que certains n'aiment pas
 (« pas tous le monde aime »)

$$\exists y ((Fx \wedge Cy) \wedge \neg \forall x (Px \rightarrow Axy))$$

- (2) Il y a des fromages célèbres que personne n'aime (*moins accessible*)

$$\exists y ((Fx \wedge Cy) \wedge \forall x (Px \rightarrow \neg Axy))$$

- c. Léa déteste ceux qui détestent les gens qui ne l'aiment pas.

$$\forall x \left(\begin{array}{l} \text{\small } x \text{ est une personne et } x \text{ déteste toute personne qui n'aime} \\ \text{\small } \text{pas Léa} \\ \left(\begin{array}{l} \text{\small } y \text{ est une personne qui} \\ \text{\small } \text{n'aime pas Léa} \\ \left(\begin{array}{l} \text{\small } Px \wedge \forall y ((Py \wedge \neg Ayl) \rightarrow Dxy) \\ \text{\small } x \text{ déteste toute personne qui n'aime pas Léa} \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \rightarrow Dlx$$

ou $\forall x (Px \rightarrow (\forall y ((Py \wedge \neg Ayl) \rightarrow Dxy) \rightarrow Dlx))$

ou $\forall x \forall y (Px \rightarrow (((Py \wedge \neg Ayl) \rightarrow Dxy) \rightarrow Dlx))$

- d. Quand un des invités n'aime pas Léa, il est chassé.

$$\forall x ((Ix \wedge \neg Axl) \rightarrow Kx)$$

ou $\forall x (Ix \rightarrow (\neg Axl \rightarrow Kx))$

formule suivante incorrecte : tout ce qui n'est pas invité est chassé!

~~$\forall x ((Ix \rightarrow \neg Axl) \rightarrow Kx)$~~

donkey sentence : forme suivante **inappropriée** : x est libre dans le 2^e terme.

~~$(\exists x (Ix \wedge \neg Axl) \rightarrow Kx)$~~

- e. Personne n'a rien dit à Luc.

Deux interprétations :

Personne n'a dit quoi que ce soit à Luc (= tout le monde s'est tu)

$$\forall x (Px \rightarrow \neg \exists y (Cy \wedge Dxy))$$

ou $\neg \exists x (Px \wedge \neg \exists y (Cy \wedge Dxy))$

ou, si on reste implicite sur les « choses » : $\neg \exists x (Px \wedge \neg \exists y Dxy)$

Personne n'a « pas parlé » à Luc (= tout le monde a dit quelque chose)

$$\forall x (Px \rightarrow \exists y (Cy \wedge Dxy))$$

Vocabulaire	
p	Pierre
l	Léa
Fx	x est un fromage
Cx	x est célèbre
Ix	x est invité
Kx	x est chassé
Cx	x est une chose
Px	x est une personne
Axy	x aime y
$Dxyz$	x dit y à z

Exercice 2 [10 points]

Trouver une phrase naturelle en français qui traduise chacune des formules du calcul des prédicats ci-dessous, en supposant que :

- $A(x, y)$ signifie « x apprécie y », $P(x)$ signifie « x est un pays »,
- $V(x)$ signifie « x est un voyageur ». $H(x)$ signifie « x est une personne ».

- (2) a. $\exists x (P(x) \wedge \forall y (H(y) \rightarrow A(y, x)))$
 Il y a (au moins) un pays que tout le monde apprécie.
 Un pays est apprécié de tout le monde.

à éviter (ambiguë) : Tout le monde apprécie un pays.

- b. $\neg \exists x (V(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge A(x, y)))$
 Il n'y a pas de voyageur qui n'apprécie pas au moins un pays.
 Si quelqu'un est voyageur, il apprécie au moins un pays.

à éviter (ambiguë) : Aucun voyageur n'apprécie aucun pays.

- c. $(\forall x (H(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow \forall y \forall z (H(y) \rightarrow (P(z) \rightarrow A(y, z))))$
 Si tous les hommes voyagent, tous les hommes apprécient tous les pays.

Proposez deux formules équivalentes à la formule (2-b), l'une au moins faisant intervenir un quantificateur universel.

$$\begin{aligned} & \forall x (V(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge A(x, y))) \\ & \forall x \exists y (V(x) \rightarrow (P(y) \wedge A(x, y))) \\ & \forall x (V(x) \rightarrow \neg \forall y (P(y) \rightarrow \neg A(x, y))) \end{aligned}$$

formule suivante **non équivalente** : "tous les voyageurs apprécient tous les pays."

~~$$\forall x \forall y ((V(x) \wedge P(y)) \rightarrow A(x, y))$$~~