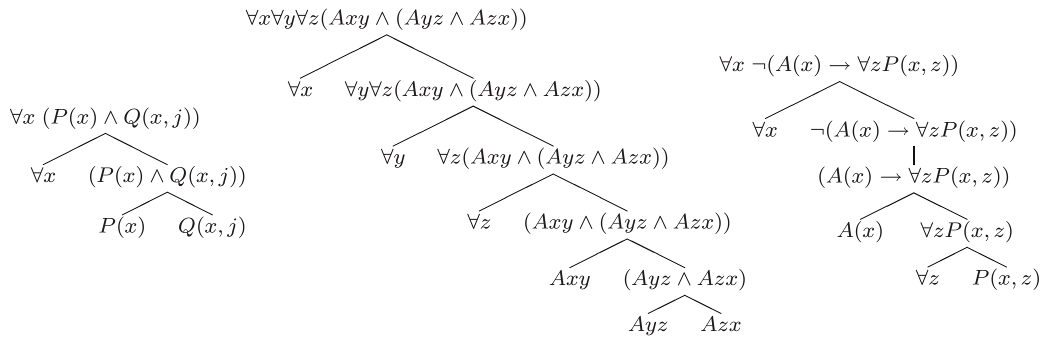
Interprétation dans les modèles

I. Retour sur la syntaxe

Définition 1

(i)	*Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule.*
(ii)	*Si φ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.*
(iii)	*Si φ et ψ sont des formules dans L, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.*
(iv)	*Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ sont des formules de L.*
(v)	*Rien d'autre n'est une formule*

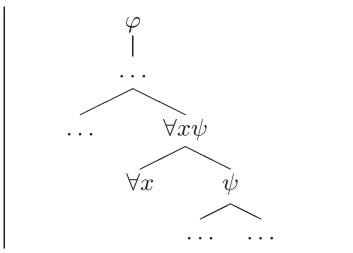
(1) a. $\cancel{P(a \wedge b)}$
b. $\cancel{M(\forall x)}$
c. $\forall x M(j)$
d. $\forall x \forall x P(x)$
e. $\cancel{\forall j P(j)}$

(2) 

(3) a. $(\forall x Ex \rightarrow Fx)$
b. $\forall x(Ex \rightarrow Fx)$
c. $(\forall x[Ex] \rightarrow Fx)$
d. $\forall x([Ex \rightarrow Fx])$

Définition 2

Si $\forall x \psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelé la ***portée*** *de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ.*
Même définition pour $\exists x$.

(4) 

(5) $\exists y(\forall z(\exists w A(z,w) \rightarrow A(y,z)) \wedge A(x,y))$

(6) Occurrences : $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

Définition 3

(a)	*Une occurrence d'une variable x dans la formule φ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite* ***libre*** *si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans φ.*
(b)	*Si $\forall x \psi$ (ou $\exists x \psi$) est une sous-formule de φ et x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite* ***liée*** *par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).*

Remarques
– toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul).
– dans $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$ les deux occurrences de x sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes).

Définition 4

Une ***phrase*** *est une formule sans variable libre.*

(7) a. $P(j)$
b. $P(j) \wedge \forall x\ A(j,x)$
c. $P(x)$
d. $\forall x A(y)$

Substitution

(8) $\Phi_{[t/x]}$: formule Φ dans laquelle on remplace toutes les occurrences **libres** de x par t.

(9) a. $\overbrace{\forall x\ \underbrace{Mx}_{\psi}}^{\varphi}$
b. $\varphi_{[j/x]} = \varphi = \forall x\ Mx$
c. $\psi_{[j/x]} = Mj$

II. Modèle propositionnel

A. Calcul (récursif) des conditions de vérité

(10) Valuation V : liste (fonction) qui donne la valeur de vérité de tous les symboles de proposition

Calcul de la valeur d'une formule φ quelconque (notée $[\![\varphi]\!]_V$) :

1. *Si χ est un symbole de proposition, alors $[\![\chi]\!]_V = V(\chi)$;*
   Pour toutes formules φ et ψ :
2. $[\![\neg\varphi]\!]_V = 1$ *ssi* $[\![\varphi]\!]_V = 0$;
3. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_V = 1$ *ssi* $[\![\varphi]\!]_V = 1$ *et* $[\![\psi]\!]_V = 1$;
4. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_V = 0$ *ssi* $[\![\varphi]\!]_V = 0$ *et* $[\![\psi]\!]_V = 0$;
5. $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_V = 0$ *ssi* $[\![\varphi]\!]_V = 1$ *et* $[\![\psi]\!]_V = 0$;
6. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_V = 1$ *ssi* $[\![\varphi]\!]_V = [\![\psi]\!]_V$;

B. Modèle propositionnel

- Modèle = ensemble de propositions (vraies)
- Modèle + Formule = Valeur de vérité
- Formule = ensemble de modèles

$\longrightarrow$ **mondes possibles**

III. Théorie des modèles

A. Ensembles & fonctions ("rappels")

On suppose un domaine d'entités
- Principe d'extensionalité
- Appartenance *vs.* inclusion
- Fonction caractéristique d'un ensemble
- Relation = ensemble de couples

B. Modèle extensionel du premier ordre

Modèle = Univers + Interprétation

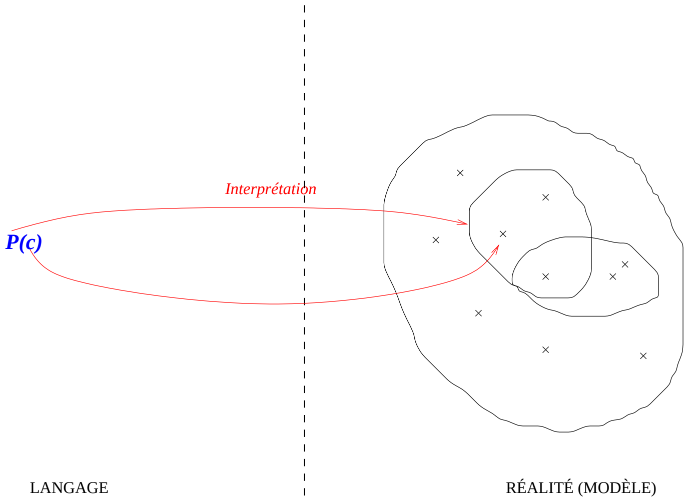


FIG. B.4 – Illustration schématique de la notion de modèle

C. Calcul On se donne un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, I \rangle$

1. ~~Si χ est un symbole de proposition, alors $[\![\chi]\!]_V = V(\chi)$;~~
   Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, ..., c_k des constantes, alors
   $$[\![(P(c_1, c_2, ..., c_k))]\!]_\mathcal{M} = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k)\rangle \in I(P)$$

Pour toutes formules φ et ψ, toute variable x :

2. $[\![\neg\varphi]\!]_\mathcal{M} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_\mathcal{M} = 0$;
3. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_\mathcal{M} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_\mathcal{M} = 1$ et $[\![\psi]\!]_\mathcal{M} = 1$;
4. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_\mathcal{M} = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_\mathcal{M} = 0$ et $[\![\psi]\!]_\mathcal{M} = 0$;
5. $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_\mathcal{M} = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_\mathcal{M} = 1$ et $[\![\psi]\!]_\mathcal{M} = 0$;
6. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_\mathcal{M} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_\mathcal{M} = [\![\psi]\!]_\mathcal{M}$;
7. $[\![\forall x\, \varphi]\!]_\mathcal{M} = 1$ ssi $[\![\varphi_{[c/x]}]\!]_\mathcal{M} = 1$ pour toute constante c
8. $[\![\exists x\, \varphi]\!]_\mathcal{M} = 1$ ssi $[\![\varphi_{[c/x]}]\!]_\mathcal{M} = 1$ pour au moins une constante c

Mondes possibles : pour un domaine d'entités fixe, on peut définir une infinité de modèles qui correspondent à autant de mondes possibles.
Une proposition de la logique des prédicats peut alors être vue comme désignant un ensemble de ces mondes possibles.

IV. Vers une théorie des types

Types élémentaires :
– entités : ***e***
– valeurs de vérités : ***t***
Les **propositions** sont de type t
Les **noms propres** (et les descriptions définies) ont une dénotation de type e
Types fonctionnels : ***a***→***b*** est le type des fonctions des objets de type ***a*** vers les objets de type ***b***
Les **prédicats (unaires)** sont de type e→t
Les **prédicats (binaires)** sont de type e→(e→t)
Les **adjectifs (non intersectifs)** sont de type (e→t)→(e→t)