Calcul des prédicats

I. Concepts de base

A. Prédicats

1. Phrases catégoriques sujet + prédicat

(1) a. Platon est un homme — H(p)
b. Le train siffle — S(t)
c. Cette bouilloire fuit — F(b)

Prédicat : **fonction** qui attend une entité et renvoie une valeur de vérité.

2. Généralisation prédicats à n places...

(2) a. Jean est plus grand que Paul — $G(j, p)$
b. Pierre plume le poulet — $P(p, l)$

... avec $n = 0$, ou 3, 4, etc.

(3) a. Il pleut
b. Pierre a présenté Léa à Marcel
c. Paul a vendu sa montre à Nicolas pour 50 000 £

3. Légende on introduit des **variables**, ce qui est important pour distinguer les *places* :

(4) a. Pierre aime Marie : $A(p, m)$
b. Marie aime Pierre : $A(m, p)$
c. aime$(x, y) \approx x$ aime y

Notations : $H(x)$ ou Hx, voire $(H)x$; $A(x, y)$ ou Axy, ou xAy, voire $((A)x)y$. Aussi : homme(x)

Qu'est-ce qu'on gagne ?

Jean est écrivain	$E(j)$	P
Jean est célèbre	$C(j)$	Q
Jean est un écrivain célèbre	$E(j) \wedge C(j)$	$P \wedge Q$

Presque rien si on n'ajoute pas la quantification !

B. Quantificateurs

(5) a. Pierre est gentil — $G(p)$
b. Tous sont gentils — $G(t)$ ⁇

quantificateur universel $\forall$

(6) a. $\forall x\ G(x)$
b. Pour toute valeur (possible) de la variable x, la formule $G(x)$ est satisfaite.

Forme générale : $\forall x\ \varphi$, où φ est une formule bien formée.

(7) a. $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x, j))$
b. $\forall y \forall y \forall z\ (Axy \wedge Ayz \wedge Azx)$
c. $\forall x\ \neg(A(x) \rightarrow \forall z\ P(x, z))$

Rq : pas de présupposition d'existence/de pluralité (contrairement à certains emplois de *tous les*) :

(8) a. ? Tous les unijambistes à trois jambes sont mortels
b. ? Tous les pères d'Alice lui font des cadeaux

(9) a. Toutes les billes de ce sachet sont en verre
b. Tout homme est mortel
c. Chacun devine quel est son destin
d. Les enfants sont endormis
e. Qui veut voyager loin ménage sa monture
f. L'homme est un animal métaphysique, autrement dit, un petit compliqué
g. Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne

Universel négatif :

(10) Rien ne dure toujours — $\forall x\ \neg T(x)$

quantificateur existentiel $\exists$

(11) a. $\exists x\ G(x)$
b. Il y a (au moins) une valeur de x qui satisfait la formule $G(x)$

(12) a. Un aérolithe est tombé dans mon jardin
b. Certains profs sont gentils
c. Il y a des nouilles au dessert
d. Quelques uns des mes amis ne boivent pas d'alcool
e. Il a du faire quelque mauvaise rencontre

Existentiel négatif :

(13) a. Il n'y a pas d'amour heureux
b. $\neg\exists x\ (Ax \wedge Hx)$

C. Interdéfinissabilité

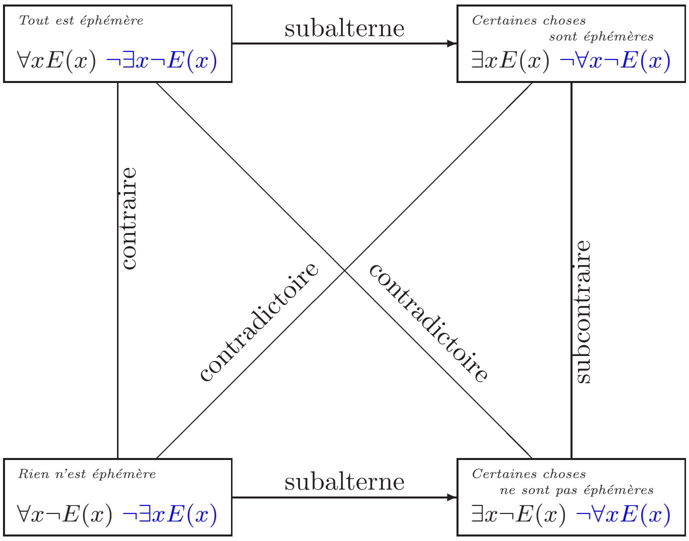

Fig. B.1 – Carré d'Aristote, quantification non restreinte

D. Restriction et univers de discours

La quantification logique est **non restreinte** :

(14) a. $\forall x\ B(x)$
b. $\approx$ Tout est bleu (y compris $\sqrt{2}$)

La quantification linguistique est (presque toujours) **restreinte** :

(15) a. Tous ont été accueillants
b. Certains philosophes roulent en Ferrari

– **Domaine de quantification** (= univers de discours) : ensemble des entités pertinentes, fournies par le *contexte*, le plus souvent implicite, mais dans certains cas marqués par un circonstant.

(16) a. ~~[Dans cette maison]~~ Tous les enfants sont endormis
b. Parmi mes amis, il n'y a pas de fumeur de pipe

– **Restriction** : sous-domaine de l'univers de discours, explicitement introduit par les quantificateurs de la langue naturelle, et tel que ne sont pertinentes pour la quantification que les entités appartenant à ce sous-domaine.

Mise en œuvre de la quantification “naturelle” (restreinte) dans un système qui ne définit que la quantification restreinte :

(17) a. Tous les philosophes sont assis : $\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$
b. Quelques philosophes sont assis : $\exists x(P(x) \wedge A(x))$

Discussion :
– $\exists x\ (Ax \wedge Bx)$ $\cancel{\forall x\ (Ax \wedge Bx)}$
$\cancel{\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)}$ $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$
– interdéfinissabilité : $A \rightarrow B$ est équivalent à $\neg(A \wedge \neg B)$

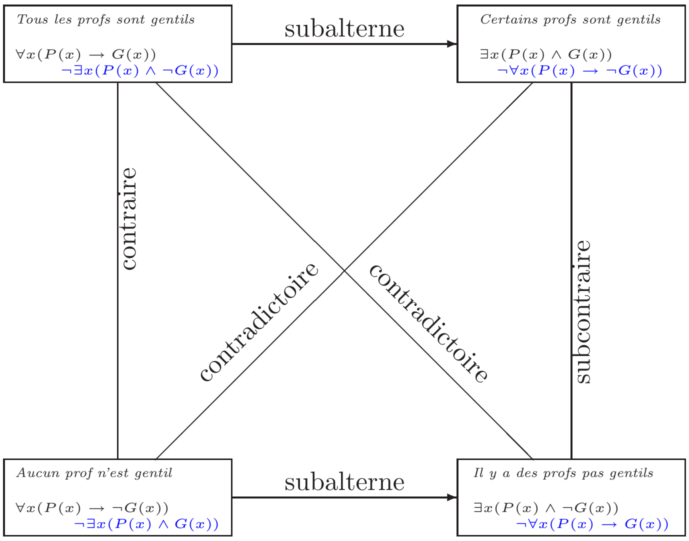

Fig. B.2 – Carré d'Aristote, quantification restreinte

II. Syntaxe

Définition 1

(i) *Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule.*

(ii) *Si φ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.*

(iii) *Si φ et ψ sont des formules dans L, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.*

(iv) *Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.*

(v) *Rien d'autre n'est une formule*

On peut, comme précédemment, (1) laisser tomber les parenthèses externes, (2) décomposer une formule de manière unique en un arbre, toutes les sous-formules d'une formule apparaissant dans l'arbre.

Définition 2

*Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ. Même définition pour $\exists x$.*

Exemple : $\exists y(\forall z(\exists w A(z, w) \rightarrow A(y, z)) \wedge A(x, y))$ Il faut distinguer les différentes **occurrences** d'un quantificateur : $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.

Définition 3

(a) *Une occurrence d'une variable x dans la formule ϕ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans ϕ.*

(b) *Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de ϕ et x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).*

Conséquence : toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul).
Noter que dans $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$ les deux occurrences de x sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes).
Noter aussi que dans $\forall x A(y)$, le quantificateur ne lie aucune variable.

Définition 4
*Une **phrase** est une formule sans variable libre.*
$\forall x A(y)$ n'est pas une phrase, par exemple.

III. Sémantique

(18) a. *Modèle propositionnel* : le monde est décrit par l'ensemble des propositions vraies
b. *Modèle extensionnel du 1er ordre* : le monde est décrit par un ensemble d'entités, les ensembles auxquelles ces entités appartiennent, et les relations entre ces entités

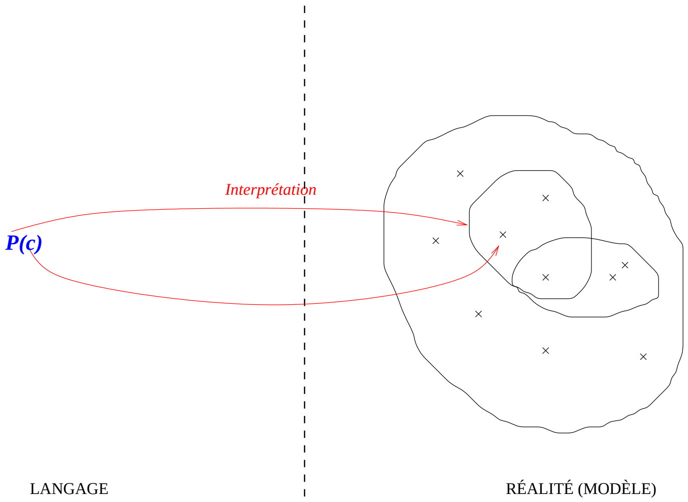

Fig. B.3 – Illustration schématique de la notion de modèle