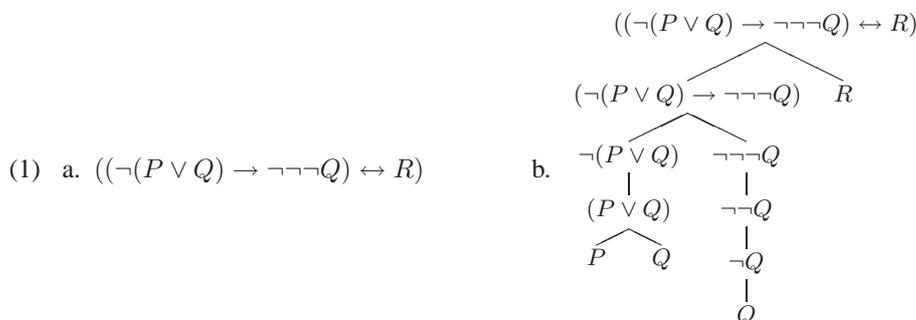


## Limites du calcul des propositions

### I. « Calcul » propositionnel : vers le raisonnement

#### A. Conditions de vérité

##### 1. Décomposition en sous-formules



**2. Tables de vérité composites** Une colonne par sous-formule ; nombre de ligne dépendant du nombre de variables propositionnelles ( $2^n$  pour  $n$  variables).

(2)  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Notation plus compacte : une colonne par sous-formule, sous le *signe principal*. Les colonnes correspondant aux variables de proposition sont recopiées autant de fois que nécessaire.

(3)

$p$	$q$	$r$	$(p \wedge (q \rightarrow r))$	$(r \rightarrow p)$	$(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (r \rightarrow p)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

### 3. Modèle, situation, conditions de vérités

- Phrase en langue naturelle  $\rightsquigarrow$  proposition
- Proposition + Situation = Valeur de vérité
- Proposition = ensemble de situations (modèles)

- (4) a. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient  
 b. Situation : Pierre ne vient pas, Marie vient, Jean vient.  
 c.  $\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$   
 d. P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

(5)

P	Q	R	$Q \vee R$	$(Q \vee R) \rightarrow P$	$\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$
0	1	1	1	0	1

### B. Calcul : vers le raisonnement

#### 1. Propriétés des formules logiques

- Tautologie / contradiction / formule contingente (satisfaisable)
- Équivalence logique / matérielle
- Conséquence logique / implication matérielle

Notations :  $\top$ ,  $\perp$ ,  $\models$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$

## 2. Validation des syllogismes

(6) le syllogisme  $\left\| \begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline R \end{array} \right\|$  est valide/correct/concluant = R est une *conséquence logique* de  $(P \wedge Q)$

(7) Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.

## II. Limites du calcul des propositions

### A. Limites « internes »

Limites spécifiques au calcul des propositions, résolues par d'autres approches formelles (calcul des prédicats, logique modale...), et qui tiennent au *pouvoir expressif*.

#### 1. Atomicité des formules

S'il pleut, la route est mouillée il pleut	Marie est une actrice célèbre Son mari est un journaliste célèbre	Si Jean est malade, Jean tousse Jean ne tousse pas
La route est mouillée	Marie et son mari sont célèbres	Jean n'est pas malade
Si un homme est malade, il tousse Jean est un homme et il est malade	Tous les hommes sont mortels Tout être mortel est désespéré	
Jean tousse	Tout homme est désespéré	

#### 2. Ordre supérieur

- (8) a. Paul croit que les cochons n'ont pas d'ailes  
b. Rien de ce que pense Léa n'est vrai  
c. Peut-être qu'il pleut  
d. S'il a plu, il pleuvra

### B. Limites « externes »

Limites que l'on va retrouver avec d'autres systèmes formels, à commencer par le calcul des prédicats.

#### 1. Connecteurs vérifonctionnels

- (9) Si  $p$ , alors  $q : p \rightarrow q$  vs.  $p \models q$
- (10) a. Si Paul et Marie sont mariés, alors Paul n'est plus célibataire  
b. Si Paul et Marie sont mariés, il ne me reste plus qu'à épouser Serena  
c. Si tu vois le phare, c'est qu'il va pleuvoir  
d. Si tu vois le phare, éteint la lumière

#### 2. Contenu véri-conditionnel

Il y a des phrases dont le contenu propositionnel n'est pas le seul contenu véhiculé.

- (11) a. — Est-ce que Jean a une petite amie ?  
— Il va souvent à Londres en ce moment.
- b. J'ai encore croisé ce crétin de Jean dans les couloirs
- c. Paul a mis son beau costume  $\left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ \text{parce qu'} \\ \text{bien qu'} \\ \text{malgré qu'} \\ \text{de sorte qu'} \end{array} \right\}$  il va/aille chez Léa

Il y a des phrases qui ne semblent pas correspondre à une proposition.

- (12) a. Que cette robe est belle !  
b. Ne remets jamais les pieds ici.  
c. Qui a effacé le tableau  
d. Qui sait combien j'ai souffert ?  
e. Une voiture, ça ? !